

Vorwort

Anlass

Dass dieses Buch ein solches werden sollte, war nicht beabsichtigt: So ging es im Sommer 2008 zunächst nur um die Vorbereitung auf einen Vortrag zu dem vieldeutigen Tagungsthema „Medien vernetzen“. * Es zeigte sich dann bereits im Laufe der mit dieser Vorbereitung verbundenen „Abenteuerreise“ ohne „Reiseführer“, insbesondere aber auch in der auf die Tagung folgenden Phase der Nachbereitung, dass über jene *aktuellen*, mit dem o. g. Thema assoziierbaren Aspekte hinaus etliche *zeitlose* Strukturen auftauchen und zu erfassen sind, die weder in einem ausgearbeiteten Tagungsbeitrag noch in einem üblichen Journalbeitrag angemessen darstellbar sind und eine ausführlichere Behandlung nicht nur nahe legen, sondern vielmehr sogar erfordern. Darüber hinaus zeigte sich in dem Rahmen schließlich, dass das Thema „Vernetzung“ in Gestalt sog. „Netzwerke“ in den Sozialwissenschaften, in der Physik, in der Biologie, in der Informatik und in der Angewandten Mathematik *hochaktuell* ist und in den letzten rund fünfzehn Jahren zur Entstehung der sog. „Netzwerkanalyse“, einer neuen transdisziplinären Forschungsdisziplin, geführt hat, die wohl nicht ohne Einfluss auf künftige Forschungsaktivitäten in der Didaktik und in der Pädagogik bleiben dürfte. „Medien“, „Netze“ und „Vernetzung“ gehören zwar allenthalben zum Sprachjargon in Politik und Presse, aber auch in der Wissenschaft: „Medien“ spielen in den Bildungswissenschaften – und hier vornehmlich in der medienpädagogischen Forschung – eine wichtige Rolle, und sie werden u. a. auch in der Didaktik der Mathematik angesprochen, wenn auch meist nicht in der ihnen gebührenden Rolle eines Fachbegriffs, sondern dann eher in der eines „selbstredenden“ Alltagsbegriffs. Für den Terminus „Vernetzen“ gilt Ähnliches: Er erfreut sich zunehmender Beliebtheit bei der Beschreibung von Unterrichtszielen und Bildungskonzepten (auch in der Didaktik der Mathematik), und dennoch scheint er wegen fehlender inhaltlicher Analyse bisher fachlich nicht definiti-

* Hauptvortrag am 27.09. 2008 auf der Herbsttagung 2008 des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik“ in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. (GDM).

onswürdig zu sein und also (noch?) nicht die Rolle eines für diese Disziplin wichtigen fachwissenschaftlichen Begriffs zu spielen. In diesem Buch wird zunächst der Versuch einer Klärung bzw. Sammlung bereits vorliegender pädagogisch bzw. didaktisch orientierter fachwissenschaftlicher Begriffsinterpretationen („Medium“) bzw. auch „alltagsüblicher“ Deutungen, Bedeutungen und Verwendungszusammenhänge (vor allem: „Netz“, „Vernetzen“ und „Vernetzungen“) vorgenommen, um daraus zu für den (mathematik-)didaktischen Kontext zweckmäßigen Begriffsbestimmungen wie „vernetzender Unterricht“ zu gelangen und diese zur Diskussion zu stellen.

Medien

Zum Thema „Medien“ kann für den pädagogisch-didaktischen Kontext bereits auf eine reichhaltige Literatur zurückgegriffen werden, die allerdings aus der fachspezifischen Sichtweise und Sozialisation der Mathematik und ihrer Didaktik nicht für jedermann stets leicht zugänglich wirken mag. Hier wurde nun der Versuch einer Synopse mit der Konzentration auf Wesentliches und der Strukturierung in neuer Sichtweise unternommen, wobei es sicherlich für manche Leserinnen und Leser überraschend sein dürfte, als wie umfassend und weit sich der Begriff „Medium“ bereits in diesem Kontext erweist. Schließlich sind folgende wesentliche Aspekte festzuhalten: Medien begegnen uns sowohl in einer „engen Auffassung“ (als sog. *technische Medien*) als auch in einer „weiten Auffassung“, und bei der letztgenannten Auffassung sind folgende Rollen hervorzuheben: Medien als *Vermittler von Kultur*, als *dargestellte Kultur*, als *Werkzeuge oder Hilfsmittel zur Weltaneignung*, als *künstliche Sinnesorgane* und als *Umgebungen bei Handlungen*. Das lässt sich mit Bezug auf Kron wie folgt zusammenfassen: *In und mit Medien setzt der lernende und erkennende Mensch seine Welt und sich selbst in Szene*. Damit kann dann die oft nebulös verwendete Bezeichnung „Lernumgebung“ sinnvoll als ein Medium gedeutet werden.

Netze

Ganz anders stellt sich das Themenfeld „Netze und Vernetzungen“ dar, das im pädagogisch-didaktischen Kontext eher einem unbestellten Acker gleicht. Hier war aus subjektiver Sicht Neuland der Didaktik zu betreten, was jedoch nicht ausschließt, dass andere es schon zuvor erblickt oder gar erschlossen haben. Dabei zeigte sich

einerseits, dass zunächst der mit der Bezeichnung „Netz“ verbundene Begriff in diesem Kontext einer Klärung bedarf: Solche Netze erweisen sich in ihrer Zusammensetzung aus *Bestandteilen* (Knoten und Kanten), *Benutzern* und *Betrachtern* und den damit einhergehenden vielfältigen Verbindungen und Beziehungen als sehr komplexe Gebilde, die nicht einfach nur als „normale“ Graphen (mit besonderen Eigenschaften) aufgefasst werden können. Daher wird ein verbales Axiomensystem für „Netz“ im pädagogisch-didaktischen Kontext entwickelt und vorgestellt, das für die Beschreibung dieser komplexen Strukturen hinreichend allgemein erscheint. Gleichwohl bieten sich (sog. „einfache“) Graphen zur strukturellen Beschreibung der *Bestandteile von Netzen* (nämlich: der „Knoten“ und ihrer „Verbindungen“, genannt „Kanten“) an, denn man kann ggf. verschiedene solcher Graphen überlagern und damit dann wohl *ohne Mehrfachkanten* auskommen. Die (ebenfalls vielfältig denkbaren) Beziehungen der *Benutzer* zu den Knoten der Bestandteile (oder auch zu deren Verbindungen) und der Benutzer untereinander lassen sich ggf. durch weitere Graphen beschreiben. Hinzu kommen noch Beziehungen der *Betrachter* untereinander, zu den Benutzern und zu den Bestandteilen, so dass diverse Graphen vorliegen können, die insgesamt in ihrer Überlagerung ein *Netz im pädagogisch-didaktischen Kontext* ausmachen. Daher werden zunächst spezielle Graphen für das *graphentheoretisch „Innerste“ der Netze* (nämlich ihre *Bestandteile*) axiomatisch charakterisiert. Im idealtypischen Fall sind das dann sog. „Netzgraphen“, verallgemeinert sind es „Netzwerke“.

Netzgraphen und Netzwerke

Typisch für „Netze“ im Alltagsverständnis ist u. a. das Vorhandensein von *Maschen*, in denen sich die „Benutzer“ verfangen können, die aber auch deren Schutz dienen können. „Bäume“ sind damit stets nicht „vernetzt“. Das führt schließlich nach mehreren Modellierungsansätzen zu der Idee, einen „Netzgraphen“ als endlichen, zusammenhängenden Graphen aufzufassen, bei dem jede Kante „Teil einer Masche“ ist, ergänzt durch die sinnvolle Zusatzforderung, dass jeder Knoten mindestens den Grad 3 hat. Das hat (als wesentliches Merkmal für „Vernetzung“!) zur Folge, dass *zwischen je zwei Knoten stets mindestens zwei verschiedene Wege* existieren. Entfernt man sukzessive einzelne Kanten aus einem Netzgraphen, so

kann zwar zunächst noch ein Netzgraph vorliegen, jedoch „kippt“ die Lage plötzlich, so dass dann kein Netzgraph mehr vorliegt, aber dieser Graph „noch“ kein Baum ist, weil noch mindestens eine Masche existiert (oder er nicht mehr zusammenhängend ist). So wird man ggf. auch derartige Graphen noch in gewissem Sinn als „vernetzt“ ansehen (können), allerdings mit folgender Konsequenz: Das (idealtypische) „Vorliegen eines Netzgraphen“ und das „Vorliegen einer Vernetzung“ bedeuten nicht dasselbe. Das o. g. „graphentheoretisch Innerste eines Netzes“ kann also im Idealfall ein Netzgraph sein, soll hier aber, um stets ansprechbar zu sein, im allgemeinen Fall „Netzwerk“ genannt werden. Ein Netzwerk ist damit dann der aus den Bestandteilen eines Netzes (s. o.) gebildete Graph, der ggf. ein Netzgraph ist, der aber dennoch eine „Vernetzung“ zum Ausdruck bringen kann, die in geeigneter Weise zu messen ist.

Vernetzungsgradmaße

So liegt es nahe, neben dem „Vorliegen eines Netzgraphen“ als einem *qualitativen Maß* für die Vernetzung auch ein *quantitatives Maß* einzuführen, genannt „Vernetzungsgrad“. Die „reine“ mathematische Graphentheorie hat zwar umfassend sog. „Bäume“ untersucht, ihr Augenmerk galt aber bisher weder Netzgraphen im hier vorgestellten Verständnis noch Vernetzungsgradmaßen in einem für die Anwendung nützlichen Sinn. Anders ist es jedoch in den Anwendungsdisziplinen, insbesondere in Physik und in Soziologie, zunehmend aber auch in Angewandter Mathematik und in Informatik, anscheinend jedoch (noch) nicht in Didaktik und in Pädagogik:

In der neuen, „Netzwerkanalyse“ genannten, Disziplin werden zwar keine idealtypischen „Netzgraphen“ untersucht, wohl aber die Struktur „natürlich entstehender Netzwerke“, und in dem Zusammenhang wurden auch unterschiedliche Vernetzungsgradmaße vorgeschlagen und für die Untersuchung solcher Netzwerke herangezogen, und zwar beispielsweise und insbesondere: *mittlerer Knotenabstand*, *Clusterkoeffizient*, *mittlerer Knotengrad* und *Durchmesser* des Graphen. Diese und weitere Vernetzungsgradmaße sind sog. „Netzwerkstatistiken“, und sie messen je unterschiedliche Eigenschaften. Es sind globale Maße, denen oft lokale zugrunde liegen. In ihrer Gesamtheit und Verschiedenartigkeit können sie zur Beurteilung der jeweils konkreten „Vernetzungsgüte“ herangezogen werden.

Modellierung realer Netzwerke

„Natürliche“ Netzwerke entstehen i. d. R. nicht planmäßig, sondern unter stochastischen Bedingungen. Die ersten Untersuchungen solcher „Zufallsgraphen“ waren rein graphentheoretischer Natur. Bei dem auf Erdős und Rényi (1959) zurückgehenden *ER-Modell* werden vorhandene Knoten zufallsbedingt durch Kanten verbunden. Dieses Modell konnte jedoch das Auftreten sog. „Kleiner Welten“ („Small Worlds“), wie man sie z. B. bei der *Erdős-Zahl* oder beim *Kevin-Bacon-Orakel* kennt, nicht gut erklären.

Eine neue Phase in der mathematischen Modellierung realer Netzwerke wurde durch das 1998 von Watts und Strogatz präsentierte *WS-Modell* eingeleitet: Hier werden vorhandene Kanten eines gegebenen regulären Graphen zufallsgesteuert nur „neu verdrahtet“. Damit konnte zwar das Entstehen „Kleiner Welten“ erklärt werden, nicht jedoch das Entstehen von sog. „Naben“ in realen Netzwerken: Sehr wenige Knoten des Netzwerks weisen hier einen extrem hohen Grad auf (mit sehr vielen Verbindungen zu anderen Knoten). Daraufhin stellten Barabási und Albert 1999 alternativ ihr *BA-Modell* vor, das durch *dynamisches Wachstum* und *bevorzugendes Andocken* gekennzeichnet ist, denn reale Netzwerke wachsen nämlich durch Entstehung *sowohl* neuer Kanten *als auch* neuer Knoten: So „dockt“ bei dem BA-Modell jeder *neue* Knoten nach dem „Matthäus-Effekt“ zufallsbedingt an *vorhandenen* Knoten durch *Bildung neuer Kanten* an, wobei die bereits „reichen“ Knoten bevorzugt werden („rich get richer“). Damit ist dann auch die *Entstehung von Naben erklärbar*. Insbesondere zeigt sich in Übereinstimmung mit dem BA-Modell und empirischen Untersuchungen (z. B. sowohl beim Internet als auch beim WorldWideWeb): Die *zufällige Zerstörung* einer geringen Anzahl von Knoten betrifft faktisch keine Naben, und damit ändert sich der mittlere Knotenabstand nicht, der hingegen bei *gezielten Angriffen* auf Naben dramatisch zunimmt.

Vernetzung – Vernetzender Unterricht

„Vernetzung“ ist nicht nur ein Zustand, sondern auch ein Prozess, der ggf. durch eines der genannten Modelle beschreibbar ist und der im optimalen Fall einen Netzgraphen liefert, im Normalfall jedoch „nur“ ein Netzwerk, dessen jeweils gewählter „Vernetzungsgrad“ ein Maß für eine mehr oder weniger ausgeprägte Vernetzung

bildet. Für unterschiedliche Situationen bzw. Stadien werden daher verschiedene Bezeichnungen eingeführt: *Verbindung*, *Verzweigung*, *schwache Vernetzung*, *starke Vernetzung*, *Vernetzung*, *Teilvernetzung*. Sind je zwei Knoten eines endlichen Graphen verbunden (ist der Graph also zusammenhängend), so ist er entweder *verzweigt* oder *vernetzt*: Es liegt dann entweder ein Baum oder ein vernetzter Graph vor, *Bäume* sind somit *nicht vernetzt*.

In diesem Sinne führt ein „*Vernetzender Unterricht*“ zu Aufgaben für die *Betrachter* (insbesondere die Lehrpersonen) in Bezug auf die Betreuung der *Benutzer* (insbesondere die Schülerinnen und Schüler) bei deren Umgehen mit den *Bestandteilen* (wie etwa Ideen, Vermutungen, Definitionen, Sätzen, Beispielen und Zusammenhängen).

Medien und Vernetzung – Vernetzung als Medium

„*Vernetzendes Denken*“ (aufgefasst als ein Prozess des Vernetzens) erweist sich als ein Werkzeug oder Hilfsmittel zur Weltaneignung. Es liegt damit ein *Medium in der weiten Auffassung* vor, womit sich „*Vernetzendes Denken*“ als eine *Umgebung* für den lernenden und erkennenden Menschen erweist, also als eine „*Lernumgebung*“, und so erscheint schließlich „*Vernetzung als Medium zur Weltaneignung*“.

Zum Stil dieses Buches

Typisch für den Stil dieses Buches ist die hermeneutische Vorgehensweise, die also durch einkreisendes und dabei im Prozess des Entdeckens und Erkennens zunehmend vertiefendes und durchaus erneut aufgreifendes und wiederholendes Herangehen gekennzeichnet ist. Dies ist zunächst der Tatsache geschuldet, dass beim Beginn des Schreibens dieses Buches noch gar nicht erkennbar war, wohin die Reise geht und welche Ergebnisse sich zeigen werden, sogar: ob überhaupt berichtenswerte Ergebnisse zu erwarten sind. Andererseits ist eine solche Vorgehensweise oft typisch für forschendes Tun – nicht nur in den Geisteswissenschaften, sondern auch in der Mathematik – jedoch wird ein solcher Weg der Erkenntnisgewinnung nur selten mitgeteilt, insbesondere meist nicht in der Mathematik. Bei solch einer Vorgehensweise bleibt es nicht aus, dass dynamisch innere Widersprüche entstehen, die nicht sofort offenbar werden und von denen ich hoffe, dass es mir gelungen ist, sie aufzulösen. Das mathematikhaltige Kapitel 4 könnte man zwar auf sehr wenigen Seiten nach dem mathematiküblichen Schema

„Definition – Satz – Beweis – Beispiel“ abhandeln, dabei zugleich noch mehr Theoreme unterbringen. Aber das war nicht das Ziel. Vielmehr sollte nachgezeichnet werden, wie sich die Vorstellungen tastend und sukzessive entwickelt haben. So werden Axiomensysteme und Definitionen nicht nur vorgestellt und analysiert, sondern es wird der steinige Weg zu ihrer Entdeckung bzw. Erfindung mit den zugehörigen Irrwegen ausführlich dargestellt. Insbesondere kann die Vorgehensweise in den Kapiteln 3 und 4 im Sinne aktueller Modeströmungen durchaus auch als „Modellierung“ aufgefasst werden, wobei zugleich der leider vielfach in Vergessenheit geratene *Modellbegriff der Strukturmathematik* eine wichtige Rolle spielt. Das *gesamte Buch* hat den *Charakter einer strukturierten Dokumentation* der sich über einen längeren Zeitraum erstreckenden Erkenntnisgewinnung. Es stellt – aus subjektiver Sicht – einen ersten Anlauf zur Untersuchung der bildungstheoretischen und unterrichtspraktischen Bedeutung von „Medien“ und „Vernetzung“ in ihren Zusammenhängen dar, verbunden mit dem *Wunsch*, damit eine *fruchtbare fachdidaktische Diskussion in Gang zu setzen*.

Aktualität

Kurz vor Drucklegung dieses Buches entdeckte ich das im März 2010 erschienene, 772 Seiten umfassende Buch „*Networks. An Introduction*“ von Mark E. J. Newman. Es ist das erste synoptische Werk über die Entstehung und die Struktur realer Netzwerke, und es bietet einen vorzüglichen Überblick über das junge Forschungsgebiet der „Netzwerkanalyse“ und die Ergebnisse der letzten knapp zwanzig Jahre. Es sei bezüglich des Themenbereichs „Netzwerkanalyse“ empfohlen, steht aber ansonsten nicht in Konkurrenz zum hier vorliegenden Buch, weil es einem ganz anderen Anliegen dient.

Danksagungen

Ich danke dem Verlag für die Veröffentlichung dieses Buches und die dabei angenehme Zusammenarbeit, Prof. Dr. Anselm Lambert danke ich für die Einladung zu dem für die Entstehung dieses Buches „verantwortlichen“ Vortrag (vgl. die Fußnote auf S. III), und meiner Frau Ingeborg danke ich dafür, in dem langen Zeitraum des Recherchierens, Durchdenkens und Schreibens meine dadurch bedingte häufige Zurückgezogenheit geduldig mitgetragen zu haben.

Horst Hischer, im August 2010