Vorwort

Anlass zur Durchführung dieser Studien war ein in einer Online-Enzyklopädie entdeckter Eintrag zum Stichwort „Gleichung“, der einerseits im Sinne einer sauberen Definition nicht zufriedenstellen konnte, der dann aber vor allem inhaltlich unzureichend war.

Schnell zeigte sich jedoch, dass es keineswegs einfach ist, angemessen zu beschreiben oder gar zu definieren, *was eine Gleichung ist*. Auch die spontan von mir herangezogene Fachliteratur bot mir hierfür keine zufriedenstellenden Formulierungen an. Und die weitere Recherche zeigte, dass erstaunlicherweise auch der zu „Gleichung“ gehörende *Gleichheitsbegriff* ebenfalls selten hinreichend analysiert oder hinterfragt wird.

In dieser Situation wandte ich mich am 18. 4. 2018 an meinen Kollegen Prof. Dr. Ulrich Felgner, Univ. Tübingen, mit dem ich seit längerer Zeit mehrfach einen fruchtbaren mathematischen Gedankenaustausch geführt hatte. Ich schilderte ihm das von mir diagnostizierte Problem und schrieb dazu am Ende (was ich allerdings nunmehr teilweise anders sehen und auch formulieren würde):

> In meinen Unterlagen habe ich nirgends eine allgemeine Definition von „Gleichung“ im mathematischen Kontext gefunden. Immerhin wird im „Lexikon der Mathematik“ (Spektrum Akademischer Verlag 2000) „Gleichung“ definiert, leider nur wie in Wikipedia als eine „Gleichheit“ zwischen zwei Termen.[1] Jedoch ist das für die Mathematik viel zu eng, denn „Gleichungen“ finden wir überall, so auch in der Geometrie oder gar in der Mengenlehre. Doch wo wird das allgemein definiert?
>
> Und auch im Mathematikunterricht treten Gleichungen nicht nur bei Termen auf, sondern z. B. auch in der Geometrie. Also wenn schon, dann sollte und müsste man das allgemeiner definieren (wenn's denn überhaupt geht, oder geht es gar nicht?) – so war zumindest mein erster Anspruch.
>
> Die weitere Durchdringung dieser Fragestellung in den letzten Tagen führte dann bei mir zu folgender Vermutung:[2]

---

1 Diesen damals spontanen Einwand halte ich nach ausführlicher Durchführung dieser „Studien“ nunmehr nicht mehr aufrecht, sodass der erwähnte Eintrag im „Lexikon der Mathematik“ als korrekt anzusehen ist, wenngleich er in der vorliegenden Form einer Erläuterung bedarf, damit der dort herangezogene Termbegriff hinreichend weit verstanden werden kann. (Siehe hierzu entsprechende Ausführungen in Abschnitt 5.2.)

2 Auch diese Vermutung konnte erfreulicherweise *konstruktiv revidiert* werden.

> - Wir können (nicht nur!) in der Mathematik überhaupt nicht allgemein definieren, was eine Gleichung ist (bzw. worauf es wohl hinaus läuft: was denn „Gleichheit" bedeutet).
> - Vielmehr müssen wir (locker formuliert) für jeden „Objektbereich" neu definieren, was hier „Gleichheit" bedeuten soll, und was dann also hier „Gleichungen" sein sollen (oder sind?).
>
> Wenn es um Zahlen (und damit verbunden: um Terme) geht, kann man das über „Gleichheit von Zahlen" machen (was zur Frage führt, wann zwei Zahlen „gleich" sind, ferner: was ist denn überhaupt eine „Zahl" – im Unterschied zum Zahlzeichen?) – damit sind wir schon im Bereich der Philosophie der Mathematik! Und wenn es um geometrische Objekte wie etwa Strecken oder Geraden geht, dann bedarf es jeweils eigener Definitionen von „Gleichheit"! Und auch z. B. die „Gleichheit von Mengen" wird ja definiert.
>
> Nun wäre es schön, wenn das schon jemand irgendwo so oder ähnlich untersucht und geschrieben hat. Können Sie mir hier evtl. mit Literaturhinweisen weiterhelfen? Oder was meinen Sie dazu? Ist meine Vermutung richtig, dass „Gleichheit" stets kontextbezogen einer Definition bedarf, oder kann es ein kontextfreies Verständnis von „Gleichheit" geben?

Damit war ein anscheinend „kleines" Forschungsprojekt umrissen – und hieraus ergab sich zu meiner Überraschung und der von Ulrich Felgner eine *lang anhaltende gemeinsame Arbeit* an dieser Fragestellung. Insbesondere konnte die letztgenannte Frage positiv beantwortet werden.

Gegen Ende des Jahres 2018, nachdem wir beide viel Material gesammelt und analysiert hatten, entschieden wir uns dann, statt einer zunächst geplanten gemeinsamen Publikation zwei getrennte Abhandlungen zu verfassen: eine rein mathematisch-logische durch Ulrich Felgner (die dann 2020 in Heft 2 der '*Jahresberichte der DMV*' erschienen ist) und eine darauf bezogene, mathematikdidaktisch orientierte von mir, die in der Neubearbeitung der '*Grundlegenden Begriffe der Mathematik*' in verkürzter Fassung als ein weiteres Kapitel erscheint.

In der *Schlussphase* der Konzeption dieser „Studien" blickte ich erneut und eher zufällig in das mir seit Langem wohlbekannte Buch '*Was sind und was sollen die Zahlen?*' von RICHARD DEDEKIND, das er 1887 im Manuskript fertiggestellt hat und das 1888 bei Vieweg erschien.

Im ersten Paragraphen mit dem Titel *„Systeme von Elementen"* schreibt er dort zu Beginn sowohl feinsinnig als auch leicht verständlich:

> Im folgenden verstehe ich unter einem Ding jeden Gegenstand unseres Denkens. Um bequem von den Dingen sprechen zu können, bezeichnet man sie durch Zeichen, z. B. durch Buchstaben, und man erlaubt sich, kurz von dem Ding a oder gar von a zu sprechen, wo man in Wahrheit das durch a bezeichnete Ding, keineswegs den Buchstaben a selbst meint. Ein Ding ist vollständig bestimmt durch alles das, was von ihm ausgesagt oder gedacht werden kann. Ein Ding a ist dasselbe wie b (identisch mit b) und b dasselbe wie a, wenn alles, was von a gedacht werden kann, auch von b, und wenn alles, was von b gilt, auch von a gedacht werden kann. Daß a und b nur Zeichen oder Namen für ein und dasselbe Ding sind, wird durch das Zeichen $a = b$ und ebenso durch $b = a$ angedeutet. Ist außerdem $b = c$, ist also c ebenfalls, wie a, ein Zeichen für das mit b bezeichnete Ding, so ist auch $a = c$. Ist die obige Übereinstimmung des durch a bezeichneten Dinges mit dem durch b bezeichneten Dinge nicht vorhanden, so heißen diese Dinge a, b verschieden, a ist ein anderes Ding wie b, b ein anderes Ding wie a; es gibt irgendeine Eigenschaft, die dem einen zukommt, dem anderen nicht zukommt.

Man beachte, dass DEDEKIND an dieser Stelle noch nicht explizite von „Mathematik“ spricht, auch weder von „Gleichung“ noch von „gleich“ oder „Gleichheit“, sondern nur von der Bedeutung des hier benutzten *Zeichens* „=“ im Sinne von *„dasselbe“*. Dieser so inhaltlich (von ihm selbst in der siebenten Zeile) erstaunlicherweise als *„identisch“* gedeuteten Beziehung zwischen zwei derartigen „Dingen“ stellt er kontradiktorisch den Terminus „verschieden“ als „nicht identisch“ gegenüber.

Die Tragweite dieser brillanten, in Bezug auf diese Studien zunächst überraschenden Darstellung DEDEKINDs wurde mir nun schlagartig bewusst: DEDEKIND kennzeichnet hier also das – für „Gleichungen“ in der Mathematik typische und nicht nur hier auftretende – „Gleichheitszeichen“ im Sinne von „identisch mit“ und nicht etwa als „ist gleich“!

Diese einschränkende Deutung passt zu dem Sachverhalt, dass man in der Mathematik das *Gleichheitszeichen* seit etwa Mitte des 19. Jahrhunderts nicht mehr im Kontext anderer mathematischer Relationen verstehen wollte, sondern nur noch als eine *logische Konstante*. Auf diesen Aspekt der Gleichheit wies mich zuvor schon Ulrich Felgner während unserer Kommunikation bei der Recherche zum vorliegenden Thema hin.

DEDEKIND verwendet übrigens *nirgendwo* in seinem Buch über den Zahlbegriff die o. g. Termini „gleich“, „Gleichheit“ oder „Gleichung“, er kommt hier ohne sie aus. Nur im Vorwort schon der ersten Auflage spricht er je einmal von „Gleichheit“ und „Gleichung“, und zwar nur im Zusammenhang mit dem Verweis auf andere Werke.

Das Ausgangsziel der hier vorliegenden Studien bestand darin, zu klären, was man im Kontext der *Mathematik* unter „Gleichung“ verstehen *will* bzw. *sollte*. Das erfordert jedoch zugleich, zu klären, was unter „Gleichheit“ und damit dann auch unter „gleich“ verstanden werden kann bzw. sollte. All dies hätte gewiss knapp als Aufsatz, im Wesentlichen nur kurz begründend Ergebnisse nennend, abgefasst werden können. Stattdessen habe ich bewusst ausführlich und oft quasi dialogisch, wenn auch nicht chronologisch, all diejenigen Wege aufgezeichnet, die nun zu den aktuellen Ergebnissen geführt haben.

Für mich sind dies deshalb „Studien“, weil didaktische Fragen und Implikationen, die möglicherweise daraus resultieren, keineswegs als für abschließend beantwortet gelten können. Vielmehr soll dies nur ein Anstoß für weitere Untersuchungen, insbesondere für mögliche didaktische Konsequenzen sein.

Meinem Kollegen Prof. Dr. Ulrich Felgner gilt an dieser Stelle mein großer Dank, denn seine mathematisch-logisch-historische Expertise hat diese Studien seit ihrem Beginn im April 2018 bereichert und vorangetrieben. Vor allem danke ich ihm für viele interessante Literaturhinweise und für den stets anregenden wechselseitigen kritischen Gedankenaustausch während des gesamten Entstehungsprozesses. Zugleich möchte ich Prof. Dr. Wilfried Herget (Universität Halle-Wittenberg) für vielfältige konstruktive Korrespondenzen während der Entstehung dieser Studien danken. Und schließlich danke ich Dr. Walter Franzbecker vom Verlag Franzbecker für die spontane Bereitschaft, diese „Studien“ als ein kleines Büchlein separat zu verlegen.

Horst Hischer, im November 2020