

## Nichtlineare Übertragung bei der Hellfeld-Abbildung mit partiell kohärenter Beleuchtung

Von *H. Hischer, E. Menzel* und *I. Weingärtner*

Institut B für Physik der Technischen Hochschule Braunschweig

### Abstract

To calculate pseudo transfer functions a microscope with symmetric partial coherent illumination and aperture stop is assumed and as objects semitransparent edges and phase edges. As found for phase contrast microscopy the transfer functions are given by a sum of a real and an imaginary term. The real term is identical with the known function describing the linear transfer of low contrast objects. This term is zero for phase edges. The imaginary term destroys the antimony of the edge image; it is a product of a modulation factor going to zero for a small object modulation and a form factor independent of the object modulation (transparency or phase retardation). This form factor has a maximum for spatial frequencies corresponding with the aperture stop. The image intensities are calculated.

### 1. Einleitung

Bei der Behandlung von inkohärent beleuchteten oder selbstleuchtenden Objekten ist die Kontrastübertragungstheorie anwendbar. Danach werden Intensitäten linear übertragen. Die Übertragungseigenschaften von Mikroskopen sind mit dieser linearen Theorie für größere Aussteuerungen nicht zu erfassen, da im Mikroskop partiell kohärente Beleuchtung herrscht [1, 2, 3]. Auch für partiell kohärente Beleuchtung wurde eine allgemeine lineare Übertragungstheorie entwickelt [4]; die Größe, die hier linear vom Objekt ins Bild übertragen wird, ist aber nicht die Intensität sondern die „mutual intensity“ bzw. „mutual coherence function“; für praktische Anwendungen ist dieser Formalismus schwierig zu handhaben. Die nichtlineare Übertragung von Intensitäten bei partiell kohärenter Beleuchtung läßt sich mit Hilfe objektabhängiger Pseudo-Übertragungsfunktionen [5, 6] beschreiben. Diese Darstellung ist weniger kompliziert, als früher angenommen wurde; sie liefert einige neue Einblicke und zeigt einen Weg, um Übertragungsfunktionen von Mikroskopen zu messen. Die Pseudo-Übertragungsfunktionen  $T(R)$  werden wie folgt definiert:

$$T(R) = \frac{\text{Fouriertransformierte des Bildes}}{\text{Fouriertransformierte des Objekts}} \quad (1)$$

$R$  ist die Ortsfrequenz. Für die Untersuchung nichtlinearer Übertragungssysteme mit  $T(R)$  eignet sich die Objektform „Kante“. Es werden im folgenden Bildintensitäten und Pseudo-Übertragungsfunktionen für die Hellfeld-Abbildung von Intensitäts- und Phasenkanten berechnet. Die Rechnungen werden eindimensional mit begrenzten Rechteckpupillen für partiell kohärente Beleuchtung durchgeführt.

### 2. Kantenbilder bei schiefer kohärenter Beleuchtung

Um  $T(R)$  nach Gl. (1) zu bestimmen, muß zunächst die Bildintensität zu einem gegebenen Objekt berechnet werden. Der Strahlengang, der den weiteren Betrachtungen zugrunde liegt, ist in Abb. 1 dargestellt. Er entspricht der

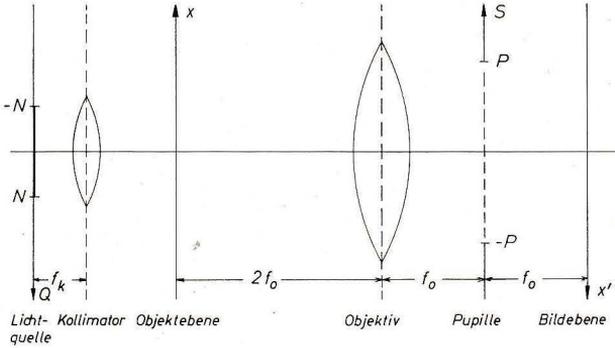


Abb. 1. Strahlengang.

Köhlerschen Beleuchtung und dem Abbildungsmaßstab 1 : 1. Es wird ohne Linsenfehler gerechnet. Der Übertragungskanal ist symmetrisch in bezug auf die optische Achse, d. h., ein seitenvertauschtes Objekt  $I_0(-x)$  hat ein seitenvertauschtes Bild  $I_b(-x')$ . Die Objektcoordinate ist  $x$ , die Bildcoordinate  $x'$ . Die Koordinaten  $Q$  der Lichtquelle und  $S = R + Q$  der Pupille sind als Ortsfrequenzen angegeben; sie hängen mit den Längenkoordinaten  $\kappa$  und  $\sigma$  in diesen Ebenen zusammen über  $Q = \kappa/\lambda f_K$  und  $S = \sigma/\lambda f_0$ .

Die Bilder des Objekts, die von verschiedenen Punkten der Lichtquelle in der Bildebene erzeugt werden, überlagern sich inkohärent. Deshalb wird zunächst für einen Lichtquellenpunkt  $Q$  außerhalb der optischen Achse (schiefe kohärente Beleuchtung) die Bildintensität berechnet. Der Übergang zu partiell kohärenter Beleuchtung kann dann durch lineare Superposition der Intensitäten für verschiedene Lichtquellenpunkte geschehen, d. h., durch Integration über die Lichtquelle.

Die Berechnung der Kantenbilder bei schiefer kohärenter Beleuchtung ist möglich dadurch, daß bei kohärenter Beleuchtung die Amplituden linear übertragen werden. Von der Objektamplitude  $u_0(x)$ , die aus der Objekt-

intensität bzw. Objektphase berechnet werden kann, kommt man nach [3] durch zweimalige Fouriertransformation unter Berücksichtigung der Pupillenamplitudentransmission  $f(S)$  zur Bildamplitude  $u_b(x', Q)$ :

$$u_b(x', Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_o(x) e^{-2\pi i Q x} f(S) e^{-2\pi i S(x'-x)} dx dS. \quad (2)$$

Gl. (2) und alle folgenden Überlegungen sind nur in der Näherung kleiner Winkel gültig. Für die Absorptionsobjekte gilt  $u_o(x) = \sqrt{I_o(x)}$  und für die Phasenobjekte  $u_o(x) = e^{i\phi(x)}$ . Die Objekte sind in Abb. 2 skizziert. Der Pupilleneingriff wird nach Abb. 1 angesetzt:

$$f(S) = \begin{cases} 1 & \text{für } |S| \leq P \\ 0 & \text{für } |S| > P \end{cases}. \quad (3)$$

Die Ortsfrequenz  $P$  entspricht der Abbeschen Auflösungsgrenze bei axialer kohärenter Beleuchtung.

Die Bildintensität  $I_b(x', Q)$  geht durch Bildung des Betragsquadrates aus  $u_b(x', Q)$  hervor. Die Berechnung der Bildintensitäten für Objektkanten bei schiefer kohärenter Beleuchtung wurde auf die skizzierte Weise durchgeführt, sie führte zu folgenden Ergebnissen für Intensitätskanten [7]:

$$\begin{aligned} I_b(x', Q) = & \frac{1}{4} (\sqrt{I_r} + \sqrt{I_1})^2 + \frac{1}{2\pi} (I_r - I_1) \{ \text{Si} [2\pi(P+Q)x'] \\ & + \text{Si} [2\pi(P-Q)x'] \} + \frac{1}{4\pi^2} (\sqrt{I_r} - \sqrt{I_1})^2 \\ & \cdot \{ (\text{Si} [2\pi(P+Q)x'] + \text{Si} [2\pi(P-Q)x'])^2 \\ & + (\text{Ci} [2\pi(P+Q)x'] - \text{Ci} [2\pi(P-Q)x'])^2 \} \end{aligned} \quad (4)$$

und für Phasenkanten:

$$\begin{aligned} I_b(x', Q) = & \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4} \sin \varphi (\text{Ci} [2\pi(P+Q)x'] - \text{Ci} [2\pi(P-Q)x']) \\ & + \frac{1}{2\pi^2} (1 - \cos \varphi) \{ (\text{Si} [2\pi(P+Q)x'] + \text{Si} [2\pi(P-Q)x'])^2 \\ & + (\text{Ci} [2\pi(P+Q)x'] - \text{Ci} [2\pi(P-Q)x'])^2 \}. \end{aligned} \quad (5)$$

Si ist der Integralsinus, Ci der Integralkosinus.

Es müssen hier die Grenzfälle Bildkoordinate  $x' \rightarrow 0$  und Aperturbegrenzung  $P \rightarrow \infty$  betrachtet werden. Da der Integralkosinus vom Argument Null den Wert unendlich annimmt, treten für  $x' = 0$  in den Gln. (4) und (5) Ausdrücke der Form  $[\infty - \infty]$  auf. Eine Diskussion des Grenzwertes ergibt [7], daß ein endlicher Wert resultiert. Im Grenzfall  $P \rightarrow \infty$  muß die Intensitätskante identisch reproduziert werden, und es darf kein strukturiertes Bild der Phasenkante entstehen. Die Diskussion dieser Grenzwerte [7] bestätigt auch dieses Ergebnis.

Die oben aufgeführten Intensitäten gelten für einen Lichtquellenpunkt Q außerhalb der optischen Achse; alle Anteile sind in bezug auf Q entweder symmetrisch oder antimetrisch. Es ist zweckmäßig, bereits hier zu einem Paar von Lichtquellenpunkten [Q, -Q] überzugehen, also die Bildintensitäten für die Lichtquellenpunkte Q und -Q zu addieren. Damit braucht die spätere Integration über die Lichtquelle nur noch von 0 bis N durchgeführt zu werden. Die Bilder für ein Paar von Lichtquellenpunkten [Q, -Q] sind für Intensitätskanten:

$$I_b(x', [Q, -Q]) = \frac{1}{2} (\sqrt{I_r} + \sqrt{I_i})^2 + \frac{1}{\pi} (I_r - I_i) \cdot A(x', [Q, -Q]) + \frac{1}{2\pi^2} (\sqrt{I_r} - \sqrt{I_i})^2 \cdot S(x', [Q, -Q]) \quad (6)$$

und für Phasenkanten:

$$I_b(x', [Q, -Q]) = 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{\pi^2} (1 - \cos \varphi) \cdot S(x', [Q, -Q]) \quad (7)$$

Dabei heißen die Abkürzungen A und S Formfaktoren, für sie gilt:

$$A(x', [Q, -Q]) = \text{Si}[2\pi(P + Q)x'] + \text{Si}[2\pi(P - Q)x'] \quad (8)$$

$$S(x', [Q, -Q]) = (\text{Si}[2\pi(P + Q)x'] + \text{Si}[2\pi(P - Q)x'])^2 + (\text{Ci}[2\pi(P + Q)x'] - \text{Ci}[2\pi(P - Q)x'])^2 \quad (9)$$

Außer Konstantanteilen enthalten die Bildintensitäten für Intensitätskanten in bezug auf  $x' = 0$  antimetrische (Funktion A) und symmetrische (Funktion S) Anteile, die für Phasenkanten nur symmetrische Anteile. Die einzelnen Anteile können aufgeteilt werden in Summen von Produkten der Form-

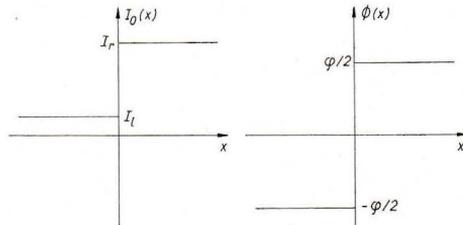


Abb. 2. Objekte: Intensitäts- und Phasenkante.

faktoren A und S und der Aussteuerungsfaktoren, die nur von  $I_i$  und  $I_r$  bzw.  $\varphi$  (s. Abb. 2) abhängen. Der vorliegende Strahlengang stellt einen symmetrischen Kanal dar. Daher muß bei linearer Übertragung aus dem antimetrischen Objekt (Kante) ein antimetrisches Bild resultieren [8], d. h., symmetrische Bildanteile stammen von rein nichtlinearer Übertragung. Folglich ist hier die Abbildung von Phasenkanten ein vollständig nichtlinearer Vorgang [9]; nur im antimetrischen Teil bei Intensitätskanten sind Anteile linearer Übertragung enthalten; im weiteren Verlauf der Diskussion wird sich zeigen (Kap. 3), daß es sich hierbei um einen rein linearen Anteil handelt. Diese Symmetriebeziehungen bleiben auch nach der Integration über die Lichtquelle bei partiell kohärenter Beleuchtung unverändert erhalten (s. Kap. 4).

### 3. Pseudo-Übertragungsfunktionen bei partiell kohärenter Beleuchtung

Die normale Reihenfolge der weiteren Behandlung würde nach der Errechnung der Bildintensität für schiefe kohärente Beleuchtung (Kap. 2) den Übergang zur Bildintensität für partiell kohärente Beleuchtung durch Integration über die Lichtquelle vorsehen. Die Integration von  $I_b(x', Q)$  nach den Gln. (4) und (5) bzw. (6) und (7) über ein endliches Integrationsintervall führt zu Schwierigkeiten. Wie im Kap. 4 gezeigt wird, läßt sich die Integration über die Lichtquelle für den antisymmetrischen Anteil geschlossen formelmäßig durchführen, nicht aber für den symmetrischen Anteil, dieser konnte nur numerisch berechnet werden. Es soll im folgenden gezeigt werden, daß trotz dieser Schwierigkeit die Übertragungsfunktion geschlossen darstellbar ist.

Um die Übertragungsfunktion zu errechnen, muß die Bildintensität für partiell kohärente Beleuchtung einer Fouriertransformation unterworfen werden, um ihr Spektrum und daraus die Übertragungsfunktion zu erhalten. Das Spektrum  $H(R)$  der Bildintensität für partiell kohärente Beleuchtung ließe sich aus der Bildintensität für ein Paar von Lichtquellenpunkten (Gln. (6) und (7)) durch Integration über die Lichtquelle  $L(Q)$  und nachfolgende Fouriertransformation gewinnen:

$$H(R) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_0^N L(Q) I_b(x', [Q, -Q]) dQ \right\} e^{2\pi i R x'} dx'. \quad (10)$$

Um die erwähnten Schwierigkeiten bei der Integration von  $I_b(x', [Q, -Q])$  über die Lichtquelle zu vermeiden, wird die Reihenfolge der Integrationen in Gl. (10) vertauscht:

$$H(R) = \int_0^N L(Q) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} I_b(x', [Q, -Q]) e^{2\pi i R x'} dx' \right\} dQ. \quad (11)$$

Es wird also zunächst die Fouriertransformation von  $I_b(x', [Q, -Q])$  ausgeführt und danach die Integration über die Lichtquelle  $L(Q)$ . Die Fouriertransformation von  $I_b(x', [Q, -Q])$  ist geschlossen möglich unter Benutzung von Tabellen zur Fouriertransformation [11]. Über die sich nach der Fouriertransformation von  $I_b(x', [Q, -Q])$  ergebenden Ausdrücke ist auch die nachfolgende Integration über die Lichtquelle geschlossen durchführbar. Damit ist auch das Spektrum der Bildintensität für partiell kohärente Beleuchtung bekannt, nicht aber die Bildintensität selbst. Die Ermittlung der Bildintensität für partiell kohärente Beleuchtung wird in Kap. 4 behandelt.

Es wird nun die Fouriertransformation von  $I_b(x', [Q, -Q])$  skizziert. Hierbei muß die Fouriertransformation über vier verschiedene Typen von Funktionen (vgl. die Gln. (6) und (7)) ausgeführt werden. Die Transformation von  $\text{Si} [2\pi (P \pm Q) x']$  und  $\text{Si}^2 [2\pi (P \pm Q) x']$  führt nach Umrechnungen auf Ausdrücke, die in [11] nachgeschlagen werden können. Die Fouriertransformierten von  $\text{Si} [2\pi (P + Q) x'] \cdot \text{Si} [2\pi (P - Q) x']$  und  $(\text{Ci} [2\pi (P + Q) x'] - \text{Ci} [2\pi (P - Q) x'])^2$  sind in [11] nicht enthalten, hier muß ein mathematischer Kunstgriff [7] benutzt werden, nämlich das Faltungstheorem; dieses

lautet: Die Fouriertransformierte des Produktes zweier Funktionen ist gleich der Faltung der Fouriertransformierten beider Funktionen. Die Fouriertransformierten der Faktoren der Produkte sind wieder in [11] angegeben. Die aus [11] entnommenen Fouriertransformierten müssen gefaltet werden. Die Faltungen besonders der Anteile mit den Integralkosinus führen zu umfangreichen Rechnungen [7], in deren Verlauf es sich als sinnvoll erweist, sich zunächst auf Lichtquellenpunkte im Bereich  $N \leq P/2$  zu beschränken. Innerhalb dieses Bereiches liegen auch die Verhältnisse bei der praktischen Mikroskopie.

Das resultierende Spektrum von  $I_b(x', [Q, -Q])$  für Intensitätskanten ist komplex, denn  $I_b(x', [Q, -Q])$  hatte symmetrische und antimetrische Anteile (Gl. (6)), das für Phasenkanten ist reell, da hier nur ein symmetrischer Anteil (Gl. (7)) vorlag. Der Realteil beider Spektren weist an den Stellen  $|R| = P \pm Q$  Unendlichkeitsstellen auf. Bei schiefer kohärenter Beleuchtung sind also vier Unendlichkeitsstellen in den Spektren enthalten, die sich bei Übergang zu axialer kohärenter Beleuchtung ( $Q = 0$ ) auf zwei Unendlichkeitsstellen bei  $|R| = P$  zusammenziehen.

Der Übergang zum Spektrum für partiell kohärente Beleuchtung aus dem Spektrum für schiefe kohärente Beleuchtung geschieht durch Integration über die Lichtquelle. Als Lichtquelle wird dabei die folgende Leuchtdichteverteilung  $L(Q)$  benutzt:

$$L(Q) = \begin{cases} 1/2N & \text{für } |Q| \leq N \\ 0 & \text{für } |Q| > N. \end{cases} \quad (12)$$

Die Lichtstärke der Lichtquelle wird also willkürlich gleich 1 gewählt.

Zur Pseudoübertragungsfunktion  $T(R)$  für partiell kohärente Beleuchtung kommt man aus dem Spektrum der Bildintensität für partiell kohärente Beleuchtung durch Bildung des Quotienten (Gl. (1)) von Bildspektrum  $H(R)$  und Objektspektrum  $O(R)$ . Das Spektrum  $O(R)$  der Objektkante [12] lautet für Intensitätskanten:

$$O(R) = \frac{i(I_r - I_l)}{2\pi R} \quad (13)$$

und für Phasenkanten:

$$O(R) = \frac{i\varphi}{2\pi R}. \quad (14)$$

Die Verhältnisse bei  $R = 0$  werden im weiteren nicht betrachtet, alle Ergebnisse gelten also nur für  $R \neq 0$ . Für die Pseudoübertragungsfunktion  $T(R, N)$  ergibt sich dann bei Intensitätskanten:

$$T(R, N) = E(R, N) + i \frac{\sqrt{I_r} - \sqrt{I_l}}{\sqrt{I_r} + \sqrt{I_l}} \cdot G(R, N) \quad (15)$$

und bei Phasenkanten:

$$T(R, N) = i \frac{1 - \cos \varphi}{\varphi} \cdot G(R, N). \quad (16)$$

Dabei sind  $E(R, N)$  und  $G(R, N)$  Abkürzungen für:

$$E(R, N) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < |R'| \leq 1 - N' \\ \frac{1}{2} + \frac{1 - |R'|}{N'} & \text{für } 1 - N' \leq |R'| \leq 1 + N' \\ 0 & \text{für } 1 + N' \leq |R'| \end{cases} \quad (17)$$

$$G(R, N) = \frac{1}{4\pi N'} \operatorname{sgn}(R')$$

$$\left. \begin{array}{l} 2(|R'| - 1 + N') \ln ||R'| - 1 + N'| \\ - 3(|R'| - 1 - N') \ln ||R'| - 1 - N'| \\ - (|R'| + 1 - N') \ln ||R'| + 1 - N'| \\ + 2\left(1 + \frac{|R'|}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{|R'|}{2}\right) \\ - 2\left(1 - \frac{|R'|}{2}\right) \ln \left(1 - \frac{|R'|}{2}\right) \\ + 3(1 - N') \ln(1 - N') \\ - 3(1 + N') \ln(1 + N') \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{für } 0 < |R'| \\ \leq 2N' \end{array} \quad (18)$$

$$\left. \begin{array}{l} 2(|R'| - 1 + N') \ln ||R'| - 1 + N'| \\ - 2(|R'| - 1 - N') \ln ||R'| - 1 - N'| \\ + 2(1 - N') \ln(1 - N') \\ - 2(1 + N') \ln(1 + N') \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{für } 2N' \leq |R'| \\ < 2(1 - N') \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} - (|R'| - 1 + N') \ln ||R'| - 1 + N'| \\ - (|R'| - 1 - N') \ln ||R'| - 1 - N'| \\ + \left(2 - \frac{3}{2}|R'|\right) \ln \left|2 - \frac{3}{2}|R'|\right| \\ - \left(2 - \frac{|R'|}{2}\right) \ln \left(2 - \frac{|R'|}{2}\right) - (1 - N') \\ \cdot \ln(1 - N') - (1 + N') \ln(1 + N') \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{für } 2(1 - N') \\ < |R'| \leq 2 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{für } 2 < |R'|. \end{array}$$

In den Gln. (17) und (18) werden die Abkürzungen  $R' = R/P$  und  $N' = N/P$  benutzt.  $T(R, N)$  für Intensitätsstufen ist additiv aus zwei Anteilen zusammengesetzt, einem Realteil und einem Imaginärteil. Der Realteil ist unabhängig von der Aussteuerung der Objektkante, der Imaginärteil läßt sich aufspalten in ein Produkt eines von der Aussteuerung unabhängigen Formfaktors  $G(R, N)$  und eines nur von der Aussteuerung abhängigen Aussteuerungsfaktors.  $T(R, N)$  für Phasenstufen ist rein imaginär, sein Formfaktor ist der gleiche wie im Imaginärteil der Übertragungsfunktion für Intensitäts-

stufen; nur die Aussteuerungsfaktoren sind verschieden. Für Phasenstufen ist der Aussteuerungsfaktor identisch mit dem des Imaginärteils bei der Abbildung von Phasenkanten im Zernike-Verfahren [5, 6].  $E(R, N)$  und  $G(R, N)$  haben eine definierte Symmetrie in bezug auf  $R = 0$ :  $E$  ist symmetrisch,  $G$  antimetrisch.

Der vorliegende Übertragungskanal ist symmetrisch (s. Kap. 2). Das Auftreten von Imaginärteilen in  $T(R, N)$  bei dem symmetrischen Übertragungskanal kann somit nur von der Nichtlinearität der Übertragung herrühren [6, 8]. Das Bild der antimetrischen Stufe erhält deshalb trotz des symmetrischen Kanals symmetrische Anteile. Das ist auch ersichtlich aus den Bildern der Stufen in Kap. 4.

Bei kleinen Aussteuerungen wird die Übertragung linear [1, 2, 3]. Hier wird der Kontrast des Phasenkantenbildes gleich Null, und das Intensitätskantenbild wird antimetrisch, denn mit fallender Aussteuerung im Objekt geht der Aussteuerungsfaktor vor dem Imaginärteil gegen Null, während der Realteil von der Aussteuerung unabhängig ist. Bei Intensitätskanten läßt sich der Grenzfall kleiner Aussteuerungen benutzen, um den Realteil  $E(R, N)$  der Übertragungsfunktion mittels einer einfachen Rechnung zu bestimmen, vgl. dazu [6]. Für kleine Aussteuerungen wird, wie oben bereits erwähnt, die Übertragung linear. Damit geht die Pseudo-Übertragungsfunktion in die bekannte Modulationsübertragungsfunktion  $D(R, N)$  für partiell kohärente bzw. inkohärente Beleuchtung über.

Es gilt also:

$$E(R, N) = D(R, N) \quad (19)$$

$D(R, N)$  läßt sich nach [3] aus folgendem Integral über die Lichtquelle ermitteln:

$$\begin{aligned} E(R, N) &= D(R, N) \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \int_{-N}^{+N} L(Q) f(Q) f^*(Q-R) dQ \right\} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < |R'| \leq 1 - N' \\ \frac{1}{2} + \frac{1 - |R'|}{N'} & \text{für } 1 - N' \leq |R'| \leq 1 + N' \\ 0 & \text{für } 1 + N' \leq |R'|. \end{cases} \quad (20) \end{aligned}$$

Das gleiche Ergebnis ließ sich auch direkt durch Ausführung der Fouriertransformation und der Integration über die Lichtquelle erreichen [Gl. (17)], jedoch auf rechnerisch schwierigere Weise.

Die Formfaktoren  $E$  und  $G$  nach den Gln. (17) und (18) werden in den Abb. 3 und 4 gezeigt.  $E$  und  $G$  sind von  $R$ ,  $N$  und  $P$  nur in Form der reduzierten Größen  $R' = R/P$  und  $N' = N/P$  abhängig. Der Realteil (Abb. 3) ist identisch mit der Übertragungsfunktion bei kleinen Aussteuerungen [1, 2]. Der Formfaktor des Imaginärteils (Abb. 4) ist für verschiedene Beleuchtungsaperturen  $N$  von Null verschieden für  $|R| \leq 2P$ . Die in der Abbeschen Auf-

fassung wurzelnde lineare Übertragung erwartet Übertragung nur für  $|R| \leq P + N$  (vgl. auch Abb. 3). Die höheren Frequenzen in  $G(R)$  müssen als Klirrfrequenzen der nichtlinearen Übertragung gedeutet werden. Der

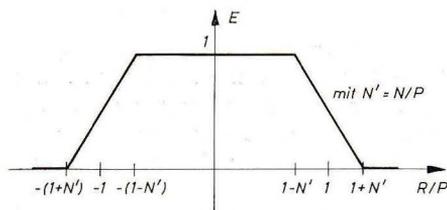


Abb. 3.

Der Realteil  $E$  der Pseudo-Übertragungsfunktion.

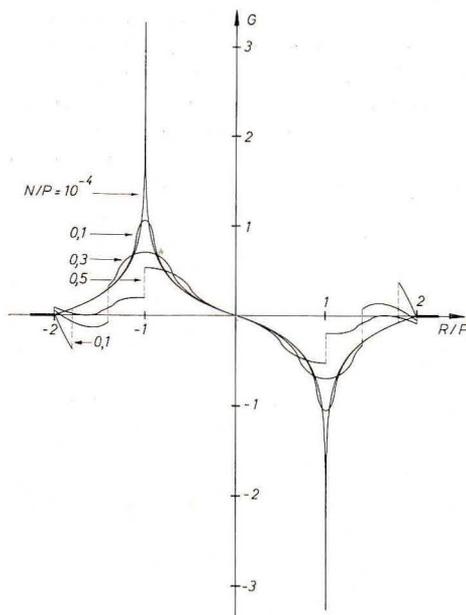


Abb. 4. Der Formfaktor  $G$  des Imaginärteils der Pseudo-Übertragungsfunktion.

Extremalwert von  $G(R)$  bei  $|R| = P$  steht in Beziehung zu dem Pol an dieser Stelle bei streng kohärenter Beleuchtung ( $N \rightarrow 0$ ). Schon bei  $N = 10^{-10} P$  ist  $G$  an dieser Stelle von der Größenordnung 10, d. h., ein (physikalisch nicht sinnvolles) Unendlichwerden im Spektrum einer Bildintensität von endlicher Größe tritt erst bei praktisch nicht erreichbaren Kohärenzgraden auf. Dieses Verhalten ist auch aus der Abb. 5 ersichtlich, die im nächsten Absatz besprochen wird<sup>1</sup>.

Das Extremum von  $G$  liegt bei  $|R| = P$ , nämlich an der Stelle, an der sich bei axialer, kohärenter Beleuchtung der Pol befindet. Dieses Extremum wird in Abb. 5 in seiner Abhängigkeit von der relativen Lichtquellengröße  $N/P$  dargestellt. Bei  $N \rightarrow 0$  geht dieses Extremum gegen unendlich. Der steile Anstieg bei kleinem  $N$  ließe sich nur in einer logarithmischen Auftragung erfassen. Wie schon erwähnt, ist die Rechnung nur gültig bis  $N = P/2$ , deshalb wurde auch die Abb. 5 nur bis hierhin gezeichnet.

<sup>1</sup> In [5, 6] wurde die Pseudo-Übertragungsfunktion für die Abbildung von Phasenkanten im Zernike-Kontrast errechnet. Die Maschinenrechnung ergab ein Maximum des Imaginärteils der Übertragungsfunktionen bei einer Frequenz, die der Breite des Zernike-Plättchens entsprach. Die geschlossene Rechnung für streng kohärente Beleuchtung zeigte nun auch an dieser Stelle einen Pol. Ein solcher Pol ist bei einer Maschinenrechnung mit begrenzter Stützstellenzahl nicht zu erhalten. Andererseits verschwindet ein solcher Pol bei kleinster Abweichung von der strengen Kohärenz.

Für inkohärente Beleuchtung ( $N \rightarrow \infty$ ) wird die Übertragung linear für Intensitäten, d. h., die Funktion  $G$  verschwindet; daraus ist zu vermuten, daß die Kurve in Abb. 5 und damit auch die ganze Funktion  $G(R, N)$  für steigendes  $N$  monoton gegen Null geht.

Der Realteil  $E(R, N)$  der Pseudo-Übertragungsfunktion stimmt für  $N = P$  überein mit der Modulationsübertragungsfunktion, die sich für inkohärente Beleuchtung ergibt. Trotzdem ist der Fall  $N = P$  nicht gleich dem Fall der Inkohärenz, da ein Imaginärteil der Pseudo-Übertragungsfunktion auch für  $N = P$  vorhanden sein wird. Das geht auch aus den Intensitätsberechnungen anderer Autoren hervor, die im Kap. 4 besprochen werden. Einen solchen Imaginärteil gibt es bei Inkohärenz nicht. Nur für kleine Aussteuerungen (Kontraste) ist der Fall  $N = P$  gleichwertig mit dem Fall der Inkohärenz, da hier der Imaginärteil gegen Null geht.

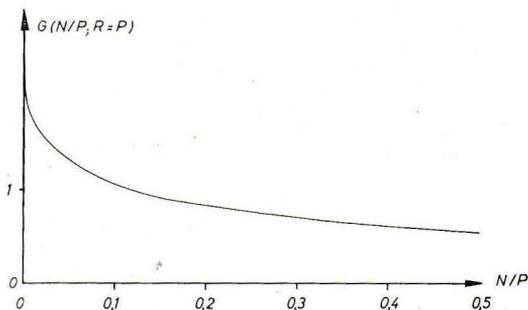


Abb. 5. Extremum von  $G$  als Funktion von  $N/P$  (bei  $|R| = P$ ).

#### 4. Bilder von Intensitäts- und Phasenstufen bei partiell kohärenter Beleuchtung

Wie gezeigt wurde, lassen sich die Pseudo-Übertragungsfunktionen bei partiell kohärenter Beleuchtung für Kantenobjekte geschlossen berechnen. Weiter läßt sich der antimetrische Anteil der Bildintensität geschlossen berechnen, nicht aber der symmetrische. Der antimetrische Anteil der Bildintensität  $I_{b,ant}(x', N)$  bei partiell kohärenter Beleuchtung kann durch Integration des antimetrischen Teils von Gl. (6) geschlossen berechnet werden; dabei helfen Formeln aus [10]. Es ergibt sich:

$$I_{b,ant}(x', N) = \frac{1}{2\pi} (I_r - I_l) \frac{1}{2\pi N x'} \{ [2\pi(P+N)x'] \text{Si}[2\pi(P+N)x'] + \cos[2\pi(P+N)x'] - [2\pi(P-N)x'] \text{Si}[2\pi(P-N)x'] - \cos[2\pi(P-N)x'] \}. \quad (21)$$

Um auch den symmetrischen Anteil der Bildintensitäten zu gewinnen, muß man numerische Methoden anwenden. Einmal wäre es möglich, von  $I_b(x', Q)$  durch numerische Integration über die Lichtquelle zum Ziel zu kommen; das

war der Weg in den Arbeiten [14, 18]. Andererseits kann man die Bildintensitäten aber auch durch numerische Fourier-Rücktransformation der Bildspektren  $H(R)$  berechnen. Die symmetrischen Anteile der Bilder für partielle Kohärenz sind auf diese Weise gewonnen.

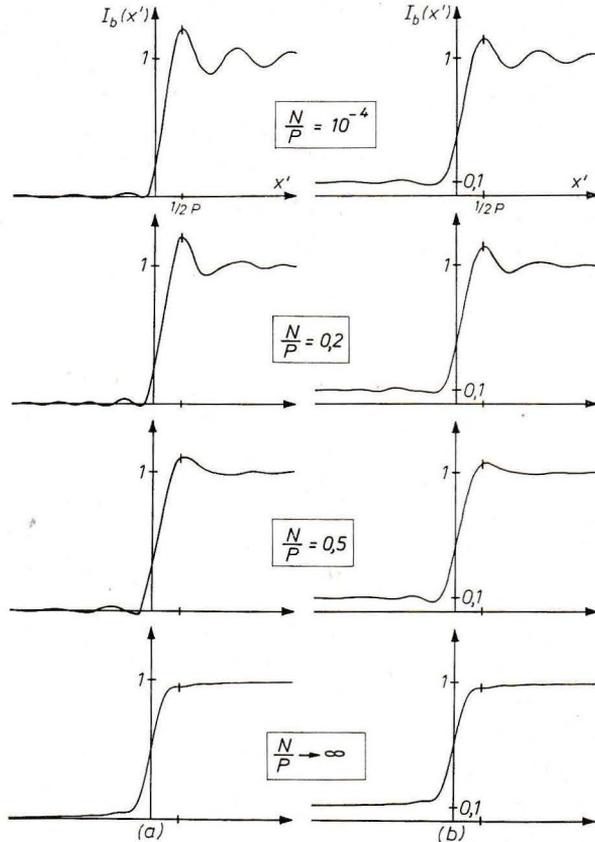


Abb. 6a und b. Bildintensitäten  $I_b(x')$  für kantenförmige Objekte bei verschiedenen Verhältnissen  $N/P$  von Beleuchtungsapertur und Objektivapertur.

- a) Absorbierende Kante  $I_1 = 0, I_r = 1$ .  
 b) Absorbierende Kante  $I_1 = 0, I_r = 1$ .

Bei Inkohärenz können die Bildintensitäten aus der üblichen Modulationsübertragungsfunktion errechnet werden. Dies führt zu der Bildintensität für Intensitätskanten bei Inkohärenz  $I_{b, \text{ink}}(x)$ :

$$I_{b, \text{ink}}(x') = \frac{1}{\pi} (I_r - I_1) \left\{ \text{Si} [4 \pi P x'] - \frac{1 - \cos [4 \pi P x']}{4 \pi P x'} \right\}. \quad (22)$$

Für  $N = P$  stimmt  $I_{b,ant}(x', N)$  nach Gl. (21) mit  $I_{b,ink}(x')$  überein. Das ist gleichwertig damit, daß für  $N = P$  der Realteil der Pseudo-Übertragungsfunktion mit der Modulationsübertragungsfunktion für Inkohärenz identisch ist (vgl. Kap. 3).

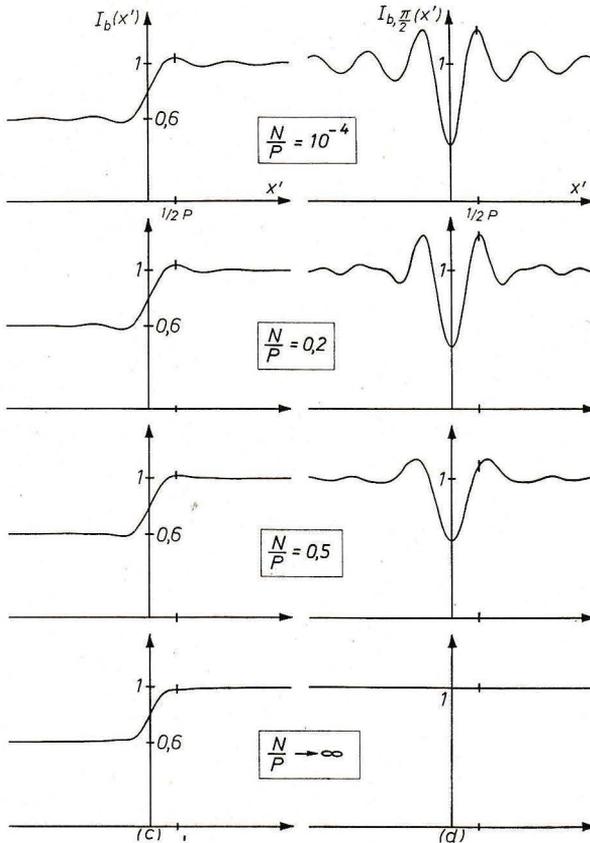


Abb. 6 c und d. Bildintensitäten  $I_b(x')$  für kantenförmige Objekte bei verschiedenen Verhältnissen  $N/P$  von Beleuchtungsapertur und Objektivapertur.

c) Absorbierende Kante  $I_1 = 0,6, I_r = 1$ .

d) Phasenkante  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ .

In den Abb. 6 a, b, c werden die Bilder von Intensitätskanten bei verschiedener Objektaussteuerung und verschiedenen relativen Lichtquellengrößen  $N/P$  gezeigt.  $I_r$  wird dabei konstant gleich 1 gesetzt. Bei großer Aussteuerung im Objekt, d. h.  $I_1 = 0$ , ist das Bild der Intensitätsstufe unsymmetrisch; es besitzt antimetrische und symmetrische Anteile. Bei fallender Aussteuerung ( $I_1$  steigt) wird der Einfluß des symmetrischen Anteils

geringer, bis schließlich bei  $I_1 = 0.6$  das Intensitätskantenbild nahezu antimetrisch ist. Hier liegt näherungsweise lineare Übertragung vor, denn die Antimetrie zeigt, daß der Imaginärteil der Übertragungsfunktion nun ohne Einfluß ist. Im Gegensatz zum Zernike-Kontrast [5, 6] bringt der Realteil der Übertragungsfunktion keinen Anteil zur Nichtlinearität.

Die Bildintensitäten für Intensitätskanten ergeben sich als Summe bzw. Differenz dreier Terme. In der Abb. 6a müßten sich diese drei Terme für  $x' < 0$  näherungsweise zu Null ergänzen. Die begrenzte Genauigkeit der Maschinenrechnung für den symmetrischen Anteil führt nach der Differenzbildung zu (physikalisch nicht realen) kleinen negativen Intensitäten. Hier wirkt sich ein geringer relativer Fehler in der Differenz zweier nahezu gleicher Größen stark aus.

In Abb. 6d werden Bilder von Phasenkanten bei verschiedenen relativen Lichtquellengrößen  $N/P$  gezeigt. Für  $N \rightarrow \infty$  existiert kein Phasenkontrast, das Bild der Phasenstufe ist strukturlos. Für partielle oder strenge Kohärenz gibt es symmetrische Bilder der antimetrischen Phasenkante, das bedeutet bei dem symmetrischen Kanal also eine vollständig nichtlineare Übertragung. Das ist auch ersichtlich aus dem Aussteuerungsfaktor  $(1 - \cos \varphi)$ . Die Form der Phasenkantenbilder ist (ohne Einbeziehung der additiven Konstanten) identisch mit der Form des symmetrischen Anteils der Intensitätskantenbilder, die Form bleibt bei verschiedenen Aussteuerungen der Phasenkante unverändert; deshalb wird nur die Bildintensität  $I_{b,\pi/2}(x', N)$  für eine Phasenkante mit  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  gezeigt. Für eine Phasenstufe  $\varphi$  wird damit die Bildintensität zu:

$$I_{b,\varphi}(x', N) = \cos^2 \frac{\varphi}{2} + (1 - \cos \varphi) \left[ I_{b,\pi/2}(x', N) - \frac{1}{2} \right]. \quad (23)$$

Wie auch bei der Dunkelfeld-Abbildung in [5, 6] ist hier die Form der Bildintensität unabhängig von  $\varphi$ .

Von anderen Autoren wurde die Abbildung von Absorptionsobjekten, Kanten [14, 17, 18] und Kreislöchern [13], in Abhängigkeit von der Kohärenz der Beleuchtung besprochen; hierbei ging es immer um Objekte mit dem Kontrast 1. In [16] wurden Kreislöcher auch mit kleinerem Kontrast als 1 betrachtet. In [15] wurden Intensitätskantenbilder bei Kontrast 1 experimentell und theoretisch für kohärente und inkohärente Beleuchtung untersucht. In [17] wurden Kantenbilder bei Kontrast 1 experimentell für verschiedene Beleuchtungsaperturen ermittelt; in [18] wurden diese Intensitäten mit theoretischen Rechnungen verglichen. Keine dieser Untersuchungen diskutierte Zusammenhänge mit der Übertragungstheorie. In der hier vorliegenden Arbeit werden Bilder von Absorptionskanten auch bei kleinerem Kontrast untersucht, um die Symmetrieverhältnisse bei verschiedenen Graden der Nichtlinearität deutlich werden zu lassen,

## 5. Bestimmung der linearen Modulationsübertragungsfunktion für partiell kohärente Beleuchtung aus Intensitätskantenbildern

Wollte man aus gemessenen Bildintensitäten für beliebige Objekte bei partiell kohärenter Beleuchtung die lineare Übertragungsfunktion berechnen, so müßte man zu kleinen Objektaussteuerungen übergehen und damit durch ein schlechtes Signal-Rausch-Verhältnis der Registriereinrichtung Fehler in Kauf nehmen (tolerierbare Aussteuerungen in diesem Zusammenhang siehe [3]). Die Rechnungen des Kap. 3 zeigen, daß aus Kantenbildern für große Aussteuerung die lineare Modulationsübertragungsfunktion des Systems berechnet werden kann, wenn man den antimetrischen Teil der Bildintensität benutzt. Man kann dann Kanten mit dem Kontrast 1 benutzen (Rasier Klinge), die gut definiert sind und große Bildkontraste und damit eine genaue Auswertung geben. In einer weiteren Arbeit sollen hierzu Einzelheiten mitgeteilt werden. In [6] wurde eine analoge Methode zur Bestimmung der linearen Phasenkontrastfunktion mitgeteilt und verifiziert.

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft danken wir für ihre Hilfen.

### Literatur

- [1] *E. Menzel*, *Optik 15* (1958) 460.
- [2] *E. Menzel*, *Optics in Metrology*, ed. P. Mollet, Pergamon Press (1960).
- [3] *H. Hauser*, *Optica Acta 9* (1962) 121.
- [4] *M. Born, E. Wolf*, *Principles of Optics*, Pergamon Press (1964), 2. Auflage, Kap. X.
- [5] *E. Menzel, I. Weingärtner*, *J. Opt. Soc. Am.*, 57 (1967) 842.
- [6] *I. Weingärtner, E. Menzel*, *Optik 26* (1967/68) 442.
- [7] *H. Hischer*, Staatsexamensarbeit, Braunschweig (1967).
- [8] *E. Menzel, K. Hohlfeld*, *Optik 26* (1967) 41.
- [9] *O. Scherzer*, *J. Appl. Phys.*, 20 (1949) 20.  
*H. H. Hopkins*, *Proc. Phys. Soc. B*, 66 (1953) 331.
- [10] *B. M. Watrasiewicz*, *Optica Acta*, 14 (1967) 317.
- [11] *F. Oberhettinger*, *Tabellen zur Fouriertransformation*, Springer, Berlin (1957).
- [12] *H. Hölzler, E. Holzwarth*, *Theorie und Technik der Pulsmodulation*, Springer, Berlin (1957).
- [13] *M. De, S. C. Som*, *Optica Acta*, 9 (1962) 17.
- [14] *R. E. Kinzly, J. Opt. Soc. Am.*, 55 (1965) 1002.
- [15] *P. S. Considine*, *J. Opt., Soc. Am.*, 56 (1966) 1001.
- [16] *S. Slansky*, *Rev. Opt.*, 39 (1960) 555.
- [17] *W. Charman, J. Opt. Soc. Am.*, 53 (1963) 410.
- [18] *B. M. Watrasiewicz*, *Optica Acta*, 12 (1965) 391.

(Eingegangen am 13. November 1967)