Sonderdruck aus „Praxis der Mathematik", 17. Jahrgang, Juli 1975, Heft 7, Seiten 177–184
Aulis Verlag Deubner & Co KG, Köln

Differenzierbarkeit als (Lipschitz-)Stetigkeit der Sekantensteigungsfunktion

Von Horst Hischer in Braunschweig

1. Einleitung. Diese Arbeit will als praxisbezogene Ergänzung zu den grundlegenden Arbeiten von Karcher [3] und Laugwitz [4] verstanden werden und damit auch deren Intentionen Nachdruck verleihen. Zwei Grundideen seien nochmals mitgeteilt:

a) Der Grenzwertbegriff für Funktionen, der der Stetigkeitsdefinition

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

zugrunde liegt, ist für die Schule (wenn er korrekt behandelt wird) viel zu schwer, weil über alle Folgen (x_n) mit $\lim(x_n) = x_0$ zu quantifizieren ist, was (inkorrekterweise) bei dem praktischen Stetigkeitsnachweis nicht getan wird.

b) Der moderne Differenzierbarkeitsbegriff (vgl. etwa Grauert-Lieb [2] oder Laugwitz) wird grenzwertfrei unter Benutzung des Stetigkeitsbegriffs gefaßt und lautet (unter Fortlassung der Quantoren): f ist genau dann an der Stelle x_0 differenzierbar, wenn es eine an der Stelle 0 stetige Funktion Δ mit

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot \Delta(h)$$

gibt.

Karcher und Laugwitz offerieren nun einen grenzwertfreien Stetigkeitsbegriff, der als ,,konstante Approximierbarkeit" von f an der Stelle x_0 interpretierbar ist (vgl. Wittmann [5]). Beachtenswert ist hierbei, daß die so konzipierte Lipschitz-Analysis in die gewöhnliche (Cauchy-)Analysis eingebettet werden kann, denn man sieht leicht: Ist f Lipschitz-stetig in x_0, dann auch Cauchy-stetig. Wir werden daher — im Gegensatz zu Karcher — im Schulunterricht anstelle von ,,gutartig" oder ,,Lipschitz-stetig" schlicht ,,stetig" sagen.

Ferner ist es zweckmäßig, anstelle der globalen (Intervall-)Stetigkeit (vgl. Karcher) die lokale Stetigkeit zu definieren, weil dann auch Beispiele für Funktionen, die nur lokal, nicht aber global stetig sind, angegeben werden können, was zu einer Bereicherung des Unterrichts führt. (Z.B. $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ mit $f(x) := x$ für $x \in \mathbf{Q}$ und $f(x) := -x$ für $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, f ist genau an der Stelle 0 stetig.) Diese lokale Stetigkeit ist motivierbar durch die Frage nach der konstanten Approximierbarkeit (s. o.) oder durch die Frage nach der ,,Durchzeichenbarkeit" einer Kurve in einem Punkt. — Die pathologischen Fälle stetiger Funktionen, nämlich diskret definierte, z. B. Folgen, sollten im Schulunterricht wohl nicht als stetig bezeichnet werden. — Damit erarbeitet man die folgende

Definition 1: *Es sei* $f: D_f \to \mathbf{R}$, $x_0 \in D_f \subset \mathbf{R}$.

f ist stetig an der Stelle x_0

(oder: *Der Graph von f ist in $(x_0; f(x_0))$ durchzeichenbar*)

(oder: *f ist an der Stelle x_0 konstant approximierbar*)

$:\Leftrightarrow$ I. $\bigvee_{a, b \in \mathbf{R}} x_0 \in]a; b[\subset D_f$,

II. $\bigvee_{K \in \mathbf{R}^+} \bigwedge_{x \in]a; b[} |f(x) - f(x_0)| \leqq K \cdot |x - x_0|$.

Falls das Bedürfnis besteht, auch diskrete Funktionen als stetig zu bezeichnen, so braucht man I. nur abzuändern zu: $x_0 \in]a; b[\cap D_f$; entsprechend ist II. zu ändern.

2. Differenzierbarkeit. Das Tangentenproblem führt zunächst auf die Definition der *Sekantensteigungsfunktion:*

$$\bigwedge_{x \in D_f \setminus \{x_0\}} s_{f,x_0}(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

s_{f,x_0} ist gemäß Definition 1 unstetig an der Stelle x_0 („Lücke"). Empirische Untersuchungen konkreter Funktionen (z. B. Anwendung von Tafeln oder Taschenrechnern) legen es nahe, die Existenz einer Tangente durch die Forderung nach Fortsetzung (bzw. Ergänzung) von s_{f,x_0} zu einer in x_0 stetigen Funktion $\bar{s}_{f,x_0}$ zu sichern. Hierbei ist also

$$\bar{s}_{f,x_0}(x) = s_{f,x_0}(x) \quad \text{für} \quad x \neq x_0 \quad \text{und} \quad \bar{s}_{f,x_0}(x_0) =: m \in \mathbf{R},$$

wobei m die Steigung der zu definierenden Tangente ist. Eine entsprechende Definition ist aber nur sinnvoll, wenn m eindeutig existiert. Es sei daher s_{f,x_0} in x_0 sowohl durch $\bar{s}_{f,x_0}$ als auch durch $\bar{\bar{s}}_{f,x_0}$ mit

$$\bar{s}_{f,x_0}(x_0) =: m_1 \qquad \text{und} \qquad \bar{\bar{s}}_{f,x_0}(x_0) =: m_2$$

stetig ergänzt. Dann ist auch

$$\bar{\bar{s}}_{f,x_0} - \bar{s}_{f,x_0}$$

als Differenz stetiger Funktionen stetig in x_0. Insbesondere ist

$$(\bar{\bar{s}}_{f,x_0} - \bar{s}_{f,x_0})(x_0) = m_2 - m_1 =: m$$

und

$$(\bar{\bar{s}}_{f,x_0} - \bar{s}_{f,x_0})(x) = 0 \quad \text{für} \quad x \neq x_0 .$$

Wegen der Stetigkeit dieser Differenzfunktion ist

$$|m| \leqq K \cdot |x - x_0| \quad \text{für alle} \quad x \in \,]a; b[\setminus \{x_0\}$$

(mit geeigneten a, b, K). Speziell für $x := x_0 + \delta$ mit

$$\delta := \tfrac{1}{2} \min\left(\frac{|m|}{K}, \quad b - x_0\right) \in \mathbf{R}^+$$

ist $x \in \,]a; b[\setminus\{x_0\}$ und damit

$$|m| \leqq K \cdot |x - x_0| = K\delta \leqq \tfrac{1}{2}|m| \qquad \text{oder} \qquad \tfrac{1}{2}|m| \leqq 0,$$

was nur für $m = 0$ erfüllbar ist. Dieses ist ein direkter Beweis im Gegensatz zu dem Beweis von Hilfssatz (10) bei Karcher. Von der Archimedizität wurde kein Gebrauch gemacht. Ferner vergleiche man auch Axiom I aus der Definition der Kontinuitätsklassen bei Laugwitz, das sich hier entscheidend widerspiegelt. — Wir kommen damit zu der entscheidenden

Definition 2: *Es sei* $f: D_f \to \mathbf{R}$, $x_0 \in D_f \subset \mathbf{R}$.

f ist differenzierbar an der Stelle x_0

(oder: *der Graph von f besitzt in $(x_0; f(x_0))$ eine Tangente*)

(oder: *f ist an der Stelle x_0 linear approximierbar*)

$:\Leftrightarrow$ *Die Sekantensteigungsfunktion s_{f,x_0} kann an der Stelle x_0 stetig ergänzt werden.*

Satz 1: *Wenn s_{f,x_0} in x_0 stetig ergänzt werden kann, dann eindeutig.*

Selbstverständlich kann dieser Satz verallgemeinert für die stetige Ergänzung einer beliebigen Funktion schon an früherer Stelle bewiesen werden, aber an dieser Stelle wird er eigentlich erst interessant. — Folgende Definitionen schließen sich sinnvollerweise an:

Definition 3. *Ist $\bar{s}_{f,x_0}$ die stetige Fortsetzung von s_{f,x_0} mit*

$$\bar{s}_{f,x_0}(x_0) =: m \in \mathbf{R},$$

so heißt $f'(x_0) := m$ die Ableitung von f an der Stelle x_0.

Definition 4. *Es sei*

$$A_f := \{x \in D_f \mid f \text{ ist in } x \text{ differenzierbar}\} \neq \emptyset$$

und

$$f' : A_f \to \mathbf{R} \quad \text{mit} \quad f'(x) := \bar{s}_{f,x}(x)$$

für alle $x \in A_f$. Dann heißt f' Ableitungsfunktion von f.

Nach diesen Begriffsbildungen soll nun demonstriert werden, welche wesentliche Vereinfachung Definition 2 gegenüber der Differenzierbarkeitsdefinition von Karcher für die Praxis bietet, weil die aufwendigen Ungleichungsketten entfallen. Wenn keine Mißverständnisse auftreten, schreiben wir nur s_f oder gar s anstelle von s_{f,x_0}.

Beispiel 1.

$$f(x) = x^2, \quad x_0 \in \mathbf{R}, \quad s(x) = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = x + x_0 =: \bar{s}(x).$$

$\bar{s}$ ist auch an der Stelle x_0 erklärt, und zwar stetig. Mit Satz 1, Definitionen 2 und 3 ist dann f in x_0 differenzierbar mit $f'(x_0) = \bar{s}(x_0) = 2x_0$, und zwar für alle $x_0 \in \mathbf{R}$.

Beispiel 2. $f(x) = \sqrt{x}$ (positive Wurzel, f nicht stetig bei $x = 0$).

$$s(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \cdot \frac{x - x_0}{x - x_0} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} =: \bar{s}(x).$$

Für $x_0 > 0$ ist $\bar{s}$ stetig in x_0 (weil die Wurzelfunktion stetig und Summe und Kehrwert stetiger Funktionen stetig sind) mit

$$\bar{s}(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} =: f'(x_0).$$

(Vergleiche hierzu die recht aufwendige Abschätzung bei Karcher.)
Insbesondere wird folgender Satz nahegelegt:

Satz 2. *f ist differenzierbar in x_0 $\Rightarrow$ f ist stetig in x_0*
(oder: *f nicht stetig in $x_0 \Rightarrow f$ nicht differenzierbar in x_0*).

Beweis. Für $x \neq x_0$ ist per def. von s

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot s(x)$$

und $s(x) = \bar{s}(x)$, also

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\,\bar{s}(x).$$

Die rechte Seite ist jetzt auch für $x = x_0$ definiert und aus in x_0 stetigen Funktionen zusammengesetzt.

Die Beweise für den Differentiationskalkül werden geradezu trivial, vor allem sind sie stets konstruktiv!

Satz 3. *f, g differenzierbar in $x_0 \Rightarrow f \pm g$, $f \cdot g$ differenzierbar in x_0 mit*

$$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$$

und

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0) \quad (\textit{Produktregel}).$$

Beweis. Durch Zerlegung findet man sofort

$$s_{f\pm g}(x) = s_f(x) \pm s_g(x),$$

woraus wegen der Stetigkeit von $\bar{s}_f$ und $\bar{s}_g$ in x_0 die Stetigkeit von

$$\bar{s}_{f\pm g} := \bar{s}_f \pm \bar{s}_g$$

in x_0 folgt, also

$$\bar{s}_{f\pm g}(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Ebenfalls durch Zerlegung folgt

$$s_{f\cdot g}(x) = s_f(x)\, g(x) + f(x)\, s_g(x).$$

Nach Voraussetzung ist stetige Fortsetzung für $x = x_0$ möglich, womit wiederum die Behauptung folgt.

Satz 4. *f differenzierbar in x_0 und $f(x) \neq 0$ für $a < x < b$ (mit geeigneten $a, b \in \mathbf{R}$) $\Rightarrow$ $\frac{1}{f}$ differenzierbar in x_0 mit*

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{[f(x_0)]^2}.$$

Beweis. Es ist

$$s_{\frac{1}{f}}(x) = -\frac{1}{f(x)\, f(x_0)} \cdot s_f(x),$$

woraus die Behauptung folgt.

Mit Satz 3 und Satz 4 finden wir dann auch die gewohnte „Quotientenregel".

Satz 5. *f differenzierbar in x_0 und g differenzierbar in $f(x_0)$ $\Rightarrow$ $g \circ f$ differenzierbar in x_0 mit*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'[f(x_0)]\, f'(x_0) \quad (\textit{Kettenregel}).$$

Beweis

$$s_{g\circ f}(x) = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

also

$$s_{g\circ f} = (s_g \circ f) \cdot s_f \quad (\text{für } x \neq x_0).$$

Wir setzen

$$\bar{s}_{g\circ f} := (\bar{s}_g \circ f) \cdot \bar{s}_f.$$

Da nach Satz 2 f stetig in x_0 ist, folgt die Stetigkeit von $\bar{s}_{g\circ f}$ in x_0.

3. Algebraische Funktionen

Satz 6. *Gebrochen rationale Funktionen sind an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs differenzierbar.*

Beweis. Wegen Satz 3 und Satz 4 genügt es, die Differenzierbarkeit von

$$f\colon \begin{cases} \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto x^n \end{cases} \quad \text{mit } n \in \mathbf{N}$$

nachzuweisen. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion. — Sei $f(x) := x$

Dann ist

$$s_f(x_0) = 1 \quad \text{für alle } x_0 \in \mathbf{R},$$

also $f'(x_0) = 1$. Sei für ein $n \in \mathbf{N}$

$$f(x) := x^n \quad \text{mit} \quad f'(x_0) = n \cdot x_0^{n-1}$$

für alle $x_0 \in \mathbf{R}$. Nach Satz 3 folgt für $g(x) := x^{n+1}$: g ist differenzierbar in x_0 mit

$$g'(x_0) = (f \cdot id)'(x_0) = n \cdot x_0^{n-1} \cdot x_0 + x_0^n \cdot 1 = (n+1) \cdot x_0^n.$$

Mit Satz 4 und Satz 6 folgt auch die Differenzierbarkeit von $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbf{Z}$. Wir wollen noch die Differenzierbarkeit beliebiger Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten nachweisen. Zunächst ist die Ableitung für Umkehrfunktionen zu berechnen.

Satz 7. *Sei f injektiv auf $]a;b[$ und differenzierbar in $x_0 \in\,]a;b[$ mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist f^{-1} differenzierbar in $f(x_0)$ mit*

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Beweis. Mit $y = f(x)$ ist $f^{-1}(y) = x$ und $y_0 := f(x_0)$.

$$s_{f^{-1}}(y) = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{s_f(x)}, \quad \text{also} \quad s_{f^{-1}} = \frac{1}{s_f}.$$

Für hinreichend kleine Umgebung von y_0 wird dann $s_{f^{-1}}$ durch

$$\bar{s}_{f^{-1}} := \frac{1}{\bar{s}_f}$$

in y_0 stetig ergänzt.

Satz 8. *Es sei*

$$f: \begin{cases} \mathbf{R}_0^+ \to \mathbf{R}_0^+, \\ x \mapsto \sqrt[n]{x} \end{cases} \qquad n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}, \quad \mathbf{R}_0^+ := \mathbf{R}^+ \cup \{0\}.$$

f ist für alle $x_0 \in \mathbf{R}^+$ differenzierbar mit

$$f'(x_0) = \frac{1}{n} \cdot x_0^{1/n-1}.$$

Beweis. Mit $y = f(x)$ setzen wir $g(y) := x = y^n$. g ist injektiv für $y > 0$, mit $f = g^{-1}$ und Satz 7 folgt die Behauptung.
In üblicher Weise folgt durch Anwendung der Kettenregel schließlich

Satz 9. *Es sei*

$$f: \begin{cases} \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+ \\ x \mapsto x^r \end{cases}, \quad r \in \mathbf{Q}.$$

f ist für alle $x_0 \in \mathbf{R}^+$ differenzierbar mit $f'(x_0) = r \cdot x_0^{r-1}$.
Die algebraischen Funktionen erschließen sich somit dem Kalkül dieses erheblich vereinfachten Differenzierbarkeitsbegriffs in gewohnter Weise.

4. Trigonometrische Funktionen. Von den transzendenten Funktionen erlauben nun auch die trigonometrischen Funktionen eine entsprechend einfache Behandlung, während die Exponentialfunktionen erst mit Hilfe des Grenzwertbegriffs sauber eingeführt werden können, was zweckmäßigerweise nach der Behandlung des Hauptsatzes der Integralrechnung geschieht. Die trigonometrischen Funktionen sehen wir wie LAUGWITZ als am Einheitskreis sauber definiert an, wobei wir uns wegen der Sätze 3, 4 und 5 auf die Untersuchung von sin beschränken können.

Nach Satz 2 ist die Stetigkeit eine notwendige Voraussetzung für die Differenzierbarkeit. Zu zeigen ist für alle $x_0 \in \mathbf{R}$:

$$\bigvee_{K \in \mathbf{R}^+} \bigvee_{a, b \in \mathbf{R}} \Big(x_0 \in]a; b[\wedge \bigwedge_{x \in]a; b[} |\sin x - \sin x_0| \leqq K \cdot |x - x_0| \Big).$$

Mit $x - x_0 := h$ schreibt sich die Ungleichung:

(1) $$D := |\sin x_0 \cdot (\cos h - 1) + \cos x_0 \cdot \sin h| \leqq K \cdot |h|.$$

Dabei ist für geeignetes $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$ $h \in]-\varepsilon; \varepsilon[$ zu wählen. Zwecks Nachweis von (1) müssen wir auf die Definition von sin und cos, also auf den Einheitskreis zurückgreifen (Fig. 1). Hieraus entnehmen wir z.B. für $h \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$:

$$|\sin h| \leqq d \leqq |h| \quad \text{und} \quad |\cos h - 1| = 1 - \cos h \leqq d \leqq |h|,$$

wobei das Gleichheitszeichen nur für $h = 0$ steht. Es folgt mit der Dreiecksungleichung für alle $x_0 \in \mathbf{R}$:

$$D \leqq |\sin x_0| \cdot |\cos h - 1| + |\cos x_0| \cdot |\sin h| \leqq (|\sin x_0| + |\cos x_0|)\,|h|.$$

Somit gilt (1) mit $K := |\sin x_0| + |\cos x_0| \in \mathbf{R}^+$.

Satz 10. *sin, cos, tan und cot sind an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs stetig.*

Zwecks Differenzierbarkeitsuntersuchung von sin an der Stelle x_0 haben wir die zugehörige Sekantensteigungsfunktion zu bilden. Es sei $a, b \in \mathbf{R}$ beliebig mit $x_0 \in]a; b[$ gewählt.

(2) $$s(x) := \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} \quad \text{für alle } x \in]a; b[\setminus \{x_0\}.$$

Wir setzen wieder $x - x_0 =: h$ und erhalten aus (2)

(3) $$\Delta(h) := s(x_0 + h) = \sin x_0 \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x_0 \cdot \frac{\sin h}{h}.$$

Δ ist als Quotient stetiger Funktionen stetig für alle $h \neq 0$. Wir setzen

(4) $$\overline{\Delta}(h) := \begin{cases} \Delta(h) & \text{für } h \neq 0 \\ m \in \mathbf{R} & \text{für } h = 0 \end{cases}$$

und wollen m so festlegen, daß $\overline{\Delta}$ an der Stelle 0 stetig wird. Mit

(5) $$f(h) := \frac{\cos h - 1}{h} \quad \text{und} \quad g(h) := \frac{\sin h}{h}$$

für $h \neq 0$ genügt es zu zeigen, daß f und g an der Stelle 0 stetig ergänzt werden können. Empirische Untersuchungen (Tafel, Taschenrechner) legen (analog definiert) die

(6) $$\text{Vermutung:} \quad \bar{f}(0) = 0 \quad \text{und} \quad \bar{g}(0) = 1$$

nahe. Zu zeigen bleibt:

(7) $$|\bar{f}(h)| \leqq K_1 \cdot |h|, \quad |\bar{g}(h) - 1| \leqq K_2 \cdot |h|,$$

wobei K_1, K_2 geeignet zu wählen sind. Für $h \neq 0$ bedeutet das:

(8) $$\left|\frac{\cos h - 1}{h}\right| \leqq K_1 \cdot |h|, \quad \left|\frac{\sin h}{h} - 1\right| \leqq K_2 \cdot |h|.$$

Mit Hilfe der üblichen Abschätzung $|\sin h| < |h| < |\tan h|$ (für $h \neq 0$) folgt

$$\left|\frac{\sin h}{h} - 1\right| < |\cos h - 1| .$$

Wegen $|\cos h - 1| \leqq h$ folgt daraus die rechte Ungleichung von (8). Für die linke Ungleichung können wir auch

$$|\cos h - 1| \leqq K_1 \cdot h^2 \tag{9}$$

schreiben. Die bisherige Abschätzung aus dem Beweis von Satz 10 ist also noch nicht scharf genug. Da in (9) die Approximation mittels einer quadratischen Funktion vorgenommen wird und die trigonometrischen Funktionen am Einheitskreis definiert sind, liegt es nahe, auch den Einheitskreis durch eine Parabel zu approximieren (Fig.2).

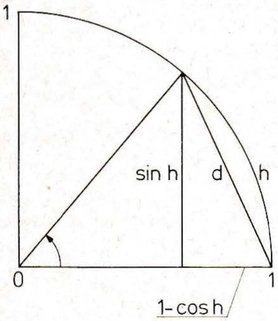

Fig. 1. Zum Beweis für $|\sin h| \leqq |h|$ und $|\cos h - 1| \leqq |h|$ für $h \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

Die zu betrachtenden Kurvengleichungen sind:

Kreis K: $\quad (y-1)^2 + x^2 = 1$,

Parabel P: $\quad y = a x^2, \quad a > 0$.

Eine Minimalforderung für „gute" Approximation von K durch P in $(0; 0)$ ist offenbar $K \cap P = \{(0;0)\}$. Das führt zu

$$(a x^2 - 1)^2 + x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2(a^2 x^2 - 2a + 1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$x = 0 \vee x^2 = \frac{2a-1}{a^2},$$

d.h., es muß $a \leqq \frac{1}{2}$ gelten. Die „beste" Parabel erhalten wir für $a = \frac{1}{2}$. (Damit haben wir nebenbei die „Schmiegeparabel" eines Kreises bzw. den „Krümmungskreis" einer Parabel ermittelt.)

In Fig. 2 gilt nun $d = x$, denn wegen $1 - \cos h = \frac{1}{2} x^2$ ist

$$d^2 = (1 - \cos h)^2 + \sin^2 h = 2(1 - \cos h) = x^2 .$$

Daher folgt für alle $h \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$:

$$|\cos h - 1| = 1 - \cos h = \tfrac{1}{2} x^2 = \tfrac{1}{2} d^2 \leqq \tfrac{1}{2} h^2 .$$

Damit wurde die Gültigkeit von (9) nachgewiesen. Freund [1] gelangt über einen direkten Ansatz mit $a = \frac{1}{2}$ durch Fig. 2 ebenfalls zu dieser Abschätzung.

Da insgesamt nunmehr (8) bewiesen wurde, gelten auch (7) und (6), d.h., $\bar{f}$ und $\bar{g}$ sind an der Stelle 0 stetig. Mit (3), (4) und (5) ist dann auch $\bar{\Delta}$ an der Stelle 0 stetig. Die Sinusfunktion ist also an jeder Stelle $x_0 \in \mathbf{R}$ differenzierbar mit der Ableitung

$$\sin'(x_0) = \bar{\Delta}(0) = m = \sin x_0 \cdot \bar{f}(0) + \cos x_0 \cdot \bar{g}(x_0) = \cos x_0 .$$

Wegen $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ folgt nach Satz 5 die Differenzierbarkeit von cos mit

$$\cos'(x) = \sin'\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot 1 = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x .$$

Mit der Quotientenregel folgen die entsprechenden Ableitungen für tan und cot. Wir erhalten in Ergänzung zu Satz 10 den

Satz 11. *sin, cos, tan und cot sind an jeder Stelle des Definitionsbereichs differenzierbar mit*

$$\sin'(x) = \cos x, \quad \cos'(x) = -\sin x, \quad \tan'(x) = \frac{1}{\sin^2 x} \quad \text{und} \quad \cot'(x) = -\frac{1}{\cos^2 x}.$$

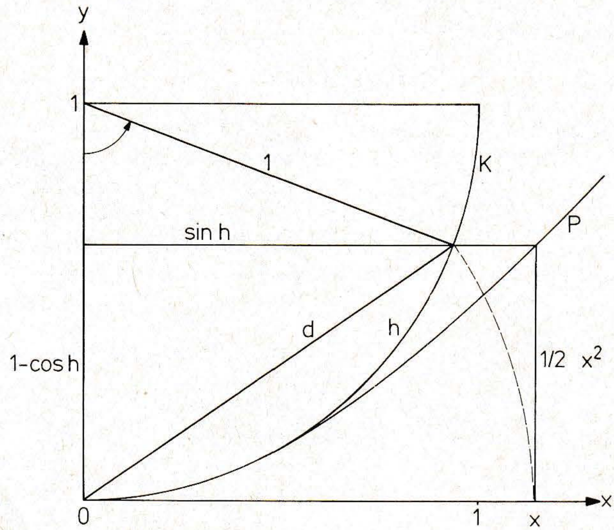

Fig. 2. Verwendung der Schmiegungsparabel P zur Herleitung von

$$|\cos h - 1| \leqq \tfrac{1}{2} h^2 \text{ für } h \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[.$$

Wir beachten, daß FREUND anhand von Abb. 2 zu der (durch die Taylorentwicklung von sin bedingten) schönen Abschätzung

$$h - \frac{h^3}{6} < \sin h < h \quad (\text{für } h > 0) \tag{12}$$

kommt, aus der auch

$$|\sin h - h| = h - \sin h < \frac{h^3}{6} < K \cdot h^2$$

für geeignetes K und geeigneten Bereich für h folgen würde. Allerdings beruht die linke Seite von (12) auf einer recht aufwendigen abbildungsgeometrischen Berechnung von

$$\int_a^x t^2\, dt.$$

Verglichen damit kommen wir hier sehr viel elementarer zum Ziel.

Literatur

[1] FREUND, H., *Die Gewinnung von Steigungswerten durch analytisch-geometrische Betrachtungen.* MU 6 (1960) 2, S. 22ff.

[2] GRAUERT-LIEB, *Differential- und Integralrechnung I.* Berlin-Heidelberg: Springer 1967.

[3] KARCHER, H., *Analysis auf der Schule.* Did. d. Math. 1 (1973) 1, S. 46ff.

[4] LAUGWITZ, D., *Ist Differentialrechnung ohne Grenzwertbegriff möglich?* Math. Phys. Sem. Ber. **20** (1973), S. 189ff.

[5] WITTMANN, E., *Die Approximation als verbindendes Element in der Analysis.* Math. Phys. Sem. Ber. **19** (1972), S. 174ff.