Zum Verständnis des Induktionsaxioms

Von HORST HISCHER in Braunschweig
und LUTZ LUCHT in Clausthal

Zu Beginn eines jeden Analysis-Lehrgangs sowohl in der Sekundarstufe II als auch im mathematischen Grundstudium ist eine Analyse des Zahlbegriffs angebracht. Den Ausgangspunkt bildet die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ...; zu ihrer Kennzeichnung wird man auf die Peano-Axiome zurückgreifen.

Nun fällt kein Axiomensystem vom Himmel, sondern es stellt stets die abstrahierte Essenz intuitiver Erkenntnis dar. Dadurch verbietet sich die unmotivierte Präsentation des Substrats von selbst. Erst im fortgeschrittenen Studium wird man auf manche Motivation verzichten, damit sie der Lernende selber finde.

Die intuitive Vorstellung von den natürlichen Zahlen, die dem Weiteren zugrunde liegt, beruht auf dem Zählprozeß (s. auch Freudenthal [2]). Diese (ordinale) Auffassung wird in natürlicher Weise durch eine von links nach rechts gelesene, nicht abbrechende Punktreihe vermittelt:

o o o o o o ...

Sie eignet sich hervorragend zur Motivierung und Formulierung der Peano-Axiome. Letzteres läßt sich besonders übersichtlich mit Hilfe der logischen Symbole $\wedge$ (und), $\vee$ (oder), $\neg$ (nicht), $\Rightarrow$ (wenn ... dann), $\Leftrightarrow$ (genau dann ... wenn), $=$ (gleich), $\bigwedge$ (für alle), $\bigvee$ (es gibt) durchführen. Sie können vorsichtig als Kürzel (also naiv) für die zugehörigen umgangssprachlichen Begriffe eingeführt werden, die dabei zugleich eine Präzisierung erfahren. Auch die Gesetzmäßigkeiten im Umgang mit ihnen lassen sich weitgehend anschaulich erläutern. Ein positiver Nebeneffekt ist die Verbesserung der Sprachbeherrschung beim Lernenden.

Wählt man als Grundbegriffe (vgl. Oberschelp [5])

eine Menge	$\mathbb{N}$ (Menge der natürlichen Zahlen),
eine auf $\mathbb{N}$ erklärte Funktion	ν (Nachfolgerfunktion),
ein Element	1 (Eins),

so lauten die Peano-Axiome:

(P_1) $1 \in \mathbb{N}$,

(P_2) $\bigwedge\limits_{n \in \mathbb{N}} \nu(n) \in \mathbb{N}$,

(P_3) $\bigwedge\limits_{n \in \mathbb{N}} \nu(n) \neq 1$,

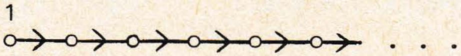
(P_4) $\bigwedge\limits_{m,n \in \mathbb{N}} (\nu(m) = \nu(n) \Rightarrow m = n)$,

(P_5) $\bigwedge\limits_{T \subset \mathbb{N}} ((1 \in T \wedge \bigwedge\limits_{n} (n \in T \Rightarrow \nu(n) \in T)) \Rightarrow T = \mathbb{N})$.

Zur Verkürzung der Aussagen steht dabei etwa $\bigwedge\limits_{n \in \mathbb{N}} \nu(n) \in \mathbb{N}$ anstelle von $\bigwedge\limits_{n} (n \in \mathbb{N} \Rightarrow \nu(n) \in \mathbb{N})$.

Wohl läßt sich die Bedeutung dieser Axiome an der Punktreihe leicht erkennen, wenn sie bereits formuliert vorliegen (vgl. [3]); jedoch entspricht das nicht unserer Methode der motivierenden Axiomatik. Hier geben wir den Abriß eines einfachen, für Schüler und Studenten einsichtigen Zugangs, der mit gutem Erfolg mehrfach erprobt worden ist und von dem wir meinen, er sei zu wenig bekannt.

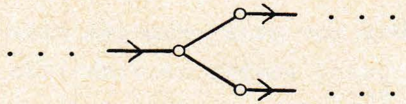
Die Anleitung zum Auffinden dieses Axiomensystems folgt Freudenthal [1]: "Die Zahlengerade ist der ganze reelle Körper im Keim mit all seinen Elementen und Operationen. Erst sieht man auf ihr wie Meilensteine die natürlichen Zahlen..."



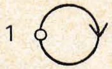
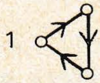
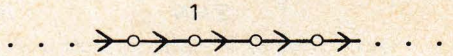
Dieses "Kettenmodell" veranschaulicht die Grundbegriffe $\mathbb{N}$, ν, 1, deren wechselseitige Beziehungen hieraus abzulesen und als Axiome zu formulieren sind. Wir wählen folgende Strategie:

Haben wir ein System von Axiomen gefunden, das außer dem Kettenmodell noch davon abweichende Modelle besitzt, so bedarf es offenbar der Hinzunahme weiterer Axiome.

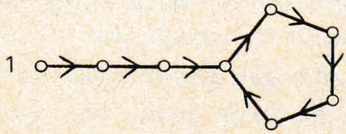
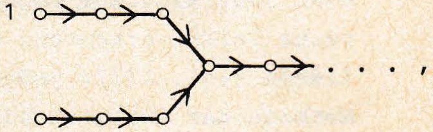
Dem Kettenmodell entnehmen wir $1 \in \mathbb{N}$, also (P_1). Insbesondere ist damit $\mathbb{N}$ nicht leer. Ferner erkennen wir, daß die Funktionswerte von ν wieder in $\mathbb{N}$ liegen, also (P_2). Man beachte, daß Verzweigungen wie



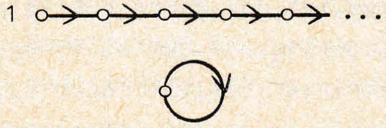
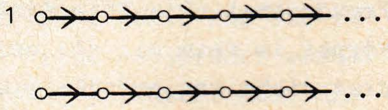
nicht möglich sind, weil ν als Funktion auf $\mathbb{N}$ erklärt ist. Aber auch die Diagramme

 oder  oder 

sind Modelle für (P_1) und (P_2); durch (P_3) werden sie ausgeschlossen. Modelle für (P_1), (P_2) und (P_3) wie

 oder ,

in denen ein Punkt verschiedene Vorgänger hat, schaltet (P_4) aus. Das heißt, ν ist injektiv. Aber dies alles reicht zur Charakterisierung von $\mathbb{N}$ noch nicht aus. Betrachten wir die Modelle

 oder ,

so stellen wir fest:

a) (P_1) bis (P_4) sind jeweils erfüllt.

b) Es gibt jeweils ein echtes Teilmodell (nämlich die obere Kette), in dem (P_1) bis (P_4) gelten.

Gemäß unserer Strategie verbieten wir b):

> $\mathbb{N}$ darf keine echten Teilmengen besitzen, die (P_1) bis (P_4) erfüllen.

Das heißt, ist T eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ mit den Eigenschaften

$$1 \in T \ ,$$

$$\bigwedge_{n} (n \in T \Rightarrow \nu(n) \in T) \ ,$$

$$\bigwedge_{n \in T} \nu(n) \neq 1 \ ,$$

$$\bigwedge_{m,n \in T} (\nu(m) = \nu(n) \Rightarrow m = n) \ ,$$

so soll $T = \mathbb{N}$ sein. Da die beiden letztgenannten Eigenschaften von ν in der umfassenden Menge $\mathbb{N}$ gelten, so bleiben sie in T für die Restriktion von ν auf T erhalten: Sie brauchen nicht mehr genannt zu werden. Übrig bleibt

$$\bigwedge_{T \subset \mathbb{N}} ((1 \in T \wedge \bigwedge_{n} (n \in T \Rightarrow \nu(n) \in T)) \Rightarrow T = \mathbb{N}) \ ,$$

und das ist das Induktionsaxiom (P_5). Es beinhaltet eine Minimaleigenschaft der Menge $\mathbb{N}$.

Die Peano-Axiome gestatten die konstruktive Einführung von Addition und Multiplikation gemäß

$$n+1 = \nu(n) \ , \quad n+\nu(m) = \nu(n+m) \ ,$$
$$n \cdot 1 = n \quad , \quad n \cdot \nu(m) = (n \cdot m)+n$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}$ (vgl. etwa Monk [4], Oberschelp [5]). Es übersteigt aber den Rahmen des Schulunterrichts (s. Freudenthal [2], Kap. 11), diese Erklärungen durch formale

Deduktion zu rechtfertigen, was den Beweis eines Rekursionssatzes erfordert. Das sollte dem mathematischen Studium vorbehalten bleiben. Wichtig ist hingegen die Erkenntnis, daß Nachfolgerbildung dem Weiterzählen um 1, Addition und Multiplikation dem sukzessiven Aneinanderlegen von Abschnitten des Kettenmodells entsprechen. Ferner läßt sich noch die Ordnungsrelation $\leqq$ erklären durch

$$m \leqq n \Leftrightarrow (m = n \vee \bigvee_{\ell \in \mathbb{N}} m + \ell = n)$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}$ (s. auch hier Oberschelp [5]).

Das Induktionsaxiom ist die Grundlage des Beweisverfahrens der vollständigen Induktion. Es betrifft Aussagen der Gestalt

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} A(n) ,$$

wobei $A(n)$ eine Aussageform mit einer Variablen n ist. Solche Aussagen treten besonders häufig auf. Um ihre Richtigkeit unter Verwendung des Induktionsaxioms nachzuweisen, betrachte man die Menge

$$T = \{n\colon n \in \mathbb{N} \wedge A(n)\} .$$

Ersichtlich ist $T \subset \mathbb{N}$. Gilt nun erstens $1 \in T$, d.h. $A(1)$, und zweitens $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} (n \in T \Rightarrow n+1 \in T)$, d.h. $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} (A(n) \Rightarrow A(n+1))$ so liefert das Induktionsaxiom $T = \mathbb{N}$, d.h. $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} A(n)$. Das Beweisschema der vollständigen Induktion lautet daher

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Induktionsbeginn:} & A(1) \\ \text{Induktionsschluß:} & \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} (A(n) \Rightarrow A(n+1)) \end{array}\right\} \Rightarrow \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} A(n).$$

Bei der Anwendung dieses Beweisprinzips auf konkrete Aussageformen $A(n)$ entstehen beim Lernenden im Schulunterricht wie im mathematischen Anfängerunterricht an der Hochschule Schwierigkeiten. Abgesehen von gelegentlich auftretenden Unklarheiten über die logische Struktur des Induktionsschlusses beruhen sie auf fehlender Übung im induktiven Schließen. Sie sollte anhand von Aufgaben erworben werden, die zugleich die Nützlichkeit der Mathematik deutlich machen. Wir geben ein Beispiel dafür an:

Im Telefonbuch einer Großstadt sind die Fernsprechteilnehmer nach Namen alphabetisch geordnet aufgeführt. Die Fernmeldebehörde benötigt ein Verzeichnis, das nach wachsenden Rufnummern geordnet ist. Es ist ein Verfahren zu entwickeln, das die in einer Rechenanlage gespeicherten Daten des Telefonbuchs in der gewünschten Weise umsortiert. Das Sortierverfahren erfordert den Größenvergleich der Telefonnummern; es sollen möglichst wenige Vergleiche durchgeführt werden.

Das folgende Verfahren führt zum Ziel: Es bezeichne V_n die Anzahl der Vergleiche, die höchstens benötigt werden, um die Rufnummern von n Fernsprechteilnehmern ihrer Größe nach in einer aufsteigenden Kette

$$T_1 < T_2 < T_3 < \ldots < T_n$$

anzuordnen. Offenbar gilt

(1) $\quad V_1 = o$.

Soll die Telefonnummer T eines weiteren Teilnehmers in die obige Kette eingegliedert werden, so wird sie, etwa von links nach rechts fortschreitend, mit den Rufnummern der Liste verglichen. Entweder fällt an einer Stelle i erstmals $T < T_i$ aus, dann ist T unmittelbar vor T_i einzufügen; oder es ist $T_i < T$ für jedes i, $1 \leqq i \leqq n$, dann ist T als letztes Glied anzuhängen. In diesem ungünstigsten Fall werden n Vergleiche benötigt. Also gilt

(2) $\quad V_{n+1} \leqq V_n + n.$

Es folgt $V_2 \leqq 1$, $V_3 \leqq 3$, $V_4 \leqq 6$, $V_5 \leqq 10$ usf; die Vermutung

(3) $$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} V_n \leqq \frac{(n-1)n}{2}$$

ist mittels vollständiger Induktion unter Verwendung von (1) und (2) rasch zu beweisen.

Dieses Verfahren und das mit ihm erzielte Resultat (3) lassen sich wesentlich verbessern: Wir gliedern in die Kette

$$T_1 < T_2 < T_3 < \ldots < T_n$$

nicht nur eine Telefonnummer T ein, sondern ordnen eine zweite derartige Kette

$$T_1' < T_2' < T_3' < \ldots < T_m'$$

ein. Die Anzahl der höchstens erforderlichen Vergleiche sei $a_{m,n}$. Dann gilt

(4) $$V_{m+n} \leqq V_m + V_n + a_{m,n} .$$

Zur Berechnung von $a_{m,n}$ stellen wir uns einen Speicher S mit m+n Plätzen vor, auf die die insgesamt m+n Telefonnummern beider Ausgangsketten gemäß ihrer Größe verteilt werden sollen. Bereits umgespeicherte Telefonnummern werden in den Ausgangsketten sofort gelöscht. Ersichtlich muß der erste freie Speicherplatz in S mit der kleineren der beiden Zahlen T_1, T_1' besetzt werden. Der zweite freie Speicherplatz ist dann zu besetzen mit der kleineren der beiden Anfangszahlen aus den reduzierten Ketten usf. Die sukzessive Besetzung der freien Plätze erfordert jeweils genau einen Vergleich, solange keine der Ausgangsketten ausgeschöpft ist. Andernfalls brauchen die Glieder der verbleibenden Restkette nur auf die noch freien Plätze von S übertragen zu werden. Da spätestens nach m+n-1 Schritten eine der Ketten vollständig abgebaut ist, was zugleich den ungünstigsten Fall darstellt, folgt

(5) $$\bigwedge_{m \in \mathbb{N}} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} a_{m,n} = m+n-1 .$$

Für $m = 1$ gehen (4) und (5) in (2) über. (Die Aussage (5) läßt sich auch durch vollständige Induktion nach m bestätigen!)

Schrittweises Ausrechnen für kleine Zahlen m, n liefert mit (1) zusammen $V_2 \leqq 1$, $V_3 \leqq 3$, $V_4 \leqq 5$ (setze $m = n = 2$), $V_5 \leqq 8$ (setze $m = 2$, $n = 3$) usf. Günstige Abschätzungen lassen sich insbesondere dann erwarten, wenn m und n ungefähr gleich groß sind. Setzen wir daher vorläufig voraus, daß die Anzahl N der Fernsprechteilnehmer eine Zweierpotenz ist, so wird folgendes Sortierverfahren nahegelegt: Man stelle sich das Telefonbuch in lauter Segmente zerlegt vor, deren jedes zunächst genau zwei Telefonnummern enthält. Im ersten Schritt werden die Zahlen nur segmentweise ihrer Größe entsprechend geordnet. Im zweiten Schritt werden jeweils Segmente von vier Zahlen betrachtet und die darin enthaltenen geordneten Zahlenpaare nach ihrer Größe sortiert. Im dritten Schritt werden entsprechend Segmente von acht Zahlen, die aus zwei schon geordneten Zahlenquadrupeln bestehen, ihrer Größe nach sortiert usf.

Für $m = n = 2^{\ell-1}$ gehen (4) und (5) über in

(6) $$V_{2^\ell} \leqq 2 \cdot V_{2^{\ell-1}} + 2^\ell - 1 .$$

Bei genügend großem ℓ lassen sich einige Rekursionsschritte rückwärts durchführen, etwa

$$\begin{aligned} V_{2^\ell} &\leqq 2 \cdot V_{2^{\ell-1}} + 2^\ell - 1 \leqq 2\cdot(2\cdot V_{2^{\ell-2}} + 2^{\ell-1} - 1) + 2^\ell - 1 \\ &= 2^2\cdot V_{2^{\ell-2}} + 2\cdot 2^\ell - 3 \leqq 2^2\cdot(2\cdot V_{2^{\ell-3}} + 2^{\ell-2} - 1) + 2\cdot 2^\ell - 3 \\ &= 2^3\cdot V_{2^{\ell-3}} + 3\cdot 2^\ell - 7 \leqq 2^3\cdot(2\cdot V_{2^{\ell-4}} + 2^{\ell-3} - 1) + 3\cdot 2^\ell - 7 \\ &= 2^4\cdot V_{2^{\ell-4}} + 4\cdot 2^\ell - 15 . \end{aligned}$$

Sie geben zu der Vermutung $V_{2^\ell} \leqq 2^\ell \cdot V_{2^{\ell-\ell}} + \ell \cdot 2^\ell - (2^\ell - 1)$ Anlaß, zusammen mit $V_1 = o$ also zu

$$(7) \quad \bigwedge_{\ell \in \mathbb{N}} V_{2^\ell} \leqq (\ell - 1) \cdot 2^\ell + 1 .$$

Vollständige Induktion zeigt unter Verwendung von $V_2 \leqq 1$ und (6) die Richtigkeit von (7).

Für beliebiges $N > 1$ ist eine Einschachtelung durch benachbarte Zweierpotenzen, $2^{k-1} < N \leqq 2^k$ $(k \in \mathbb{N})$, möglich, und wir erhalten $V_N \leqq V_{2^k} \leqq (k - 1) \cdot 2^k + 1$.

Vergleichen wir beide Verfahren für $N = 2^k$, so liefert (3) die Abschätzung

$$V_{2^k} \leqq 2^{k-1} \cdot (2^k - 1) = 2^{k-1} \cdot 2^k - 2^{k-1} ,$$

während aus (7) die günstigere Abschätzung

$$V_{2^k} \leqq (k - 1) \cdot 2^k + 1 = k \cdot 2^k - (2^k - 1)$$

kommt. Aus der Beschreibung der Verfahren geht hervor, daß diese oberen Schranken sogar angenommen werden (man konstruiere für jedes Verfahren ein geeignetes Telefonbuch!). Das zweite Verfahren verdient also den Vorzug.

Literatur

[1] FREUDENTHAL, H.: Tendenzen zur Mathematik in der Grundschule. Didaktik der Math. *1*, 2-11 (1973).

[2] FREUDENTHAL, H.: Mathematik als pädagogische Aufgabe I. Stuttgart 1973.

[3] HORNFECK, B. - L. LUCHT: Einführung in die Mathematik. Berlin 1970.

[4] MONK, J.D.: Introduction to set theory. New York 1969.

[5] OBERSCHELP, A.: Aufbau des Zahlensystems. Göttingen 1968.