SCHULE

M A T H E M A T I K

HOCH-
SCHULE

M A T H E M A T I K - D I D A K T I S C H E   V O R T R Ä G E

a n   d e r   T U   C l a u s t h a l

StD. Dr. Horst H i s c h e r

(Braunschweig)

"Methodische Varianten im Analysis-Unterricht"

Der pädagogische Spielraum des Mathematiklehrers wird durch Normierungsbestrebungen zunehmend eingeengt. Freiräume bleiben weniger bei der inhaltlichen, sondern vielmehr bei der methodischen Unterrichtsgestaltung.
In diesem Vortrag werden konkrete methodische Vorschläge zur Entwicklung mathematischer Begriffe und zum Aufbau von Unterrichtseinheiten unterbreitet, die durch die Schlagworte "Verbot des Unerwünschten" bzw. "Historische Verankerung" gekennzeichnet sind. Beide Methoden werden exemplarisch an einigen Beispielen vorgestellt.

Kurzfassung zum Vortrag vom 06.02.1982.

Technische Universität Clausthal
Institut für Mathematik

3392 Clausthal-Zellerfeld
Erzstraße 1
(Dr. Wilfried Herget)

1. Methodische Freiräume für den Analysisunterricht

Angesichts der immer stärker werdenden Einschränkungen, denen der Mathematikunterricht durch Normierungsbestrebungen ausgesetzt ist, ist durchaus die Gefahr gegeben, daß der pädagogische Spielraum der Mathematiklehrer erheblich eingeengt wird.
Da in Lehrplänen und Normenbüchern insbesondere Inhalte und Unterrichtsziele definiert werden, bleiben wohl vor allem Freiräume bei der methodischen Gestaltung des Unterrichts. So steht auch in den neuen niedersächsischen Rahmenrichtlinien ([13], S. 6): "Die Unterrichtsinhalte werden jahrgangsweise festgelegt und durch Ziele aufgeschlüsselt. Durch die angegebene Reihenfolge der Lernziele wird der Unterricht in didaktisch-methodischer Hinsicht nicht festgelegt." Und so wende ich mich in diesem Vortrag an diejenigen Mathematiklehrer, die nach methodischen Freiräumen bei der Gestaltung ihres Analysisunterrichts suchen.

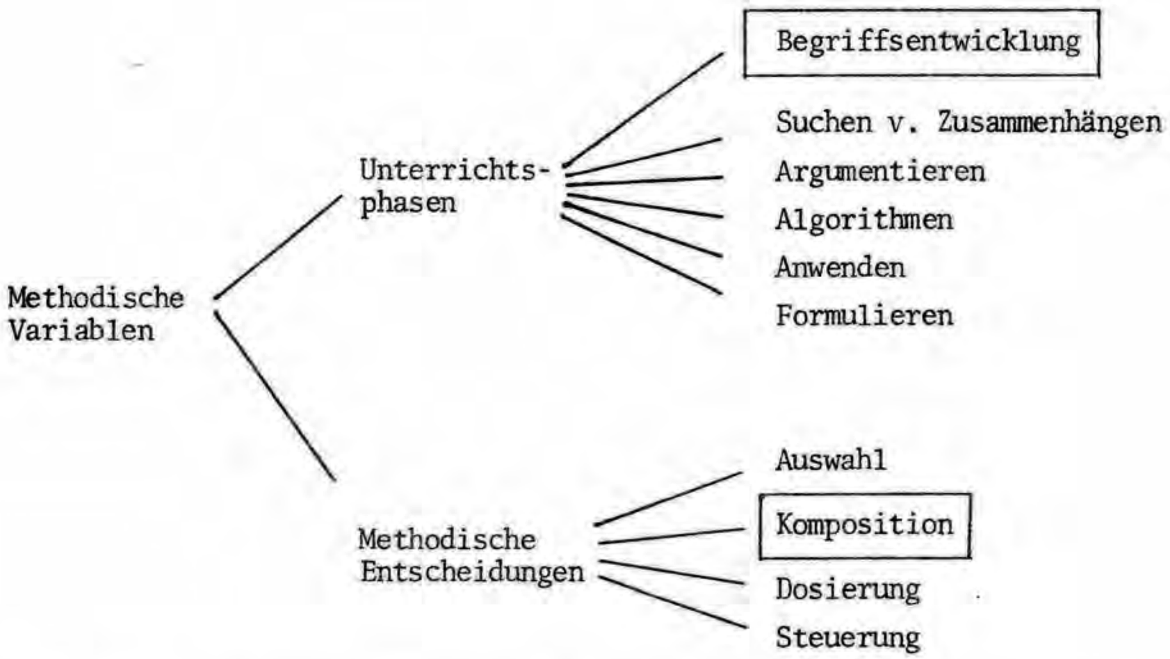


Fig. 1: Methodische Variablen (nach VOLLRATH)

VOLLRATH hat 1976 in einer wichtigen Arbeit die "Bedeutung methodischer Variablen für den Analysisunterricht" dargestellt, und hier möchte ich anknüpfen.
VOLLRATH möchte mit seiner Arbeit unter anderem den Blick öffnen für Gestaltungsmöglichkeiten des Lehrers bei seinem Unterricht. Zu dem Zweck hebt er zwei Klassen von sogenannten methodischen

Variablen hervor, und zwar Unterrichtsphasen und methodische Entscheidungen (vgl. Fig. 1). Beide Variablenklassen sind miteinander verknüpft, denn methodische Entscheidungen beziehen sich auf die Gestaltung der Unterrichtsphasen.
Als Unterrichtsphasen nennt VOLLRATH Begriffsentwicklung, Suchen von Zusammenhängen, Argumentieren, Algorithmen, Anwenden und Formulieren. Diese Unterrichtsphasen sind Bestandteile einer Unterrichtseinheit, und das sind thematische Einheiten, die eine oder mehrere Unterrichtsstunden umfassen.
Als methodische Entscheidungen führt er Probleme der Auswahl, der Komposition, der Dosierung und der Steuerung auf.

In meinem Vortrag möchte ich nun konkrete Vorschläge zur Belegung einiger methodischer Variablen machen, und zwar werde ich mich beschränken auf die Phase der Begriffsentwicklung und auf methodische Entscheidungen hinsichtlich der Komposition. Ich beginne mit dem Letzteren.

2. Zur Komposition von Unterrichtseinheiten

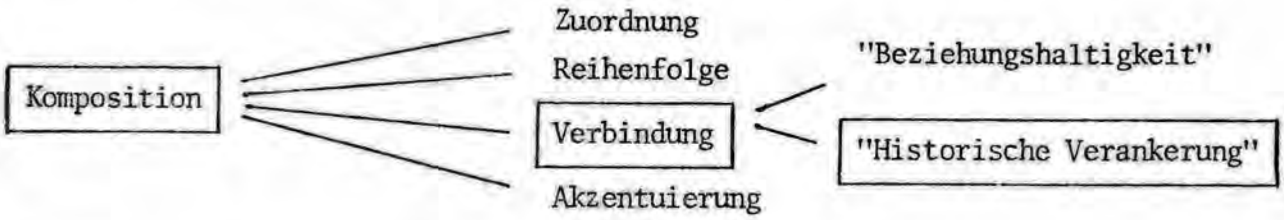


Fig. 2: "Historische Verankerung"

Die methodische Variable der Komposition gliedert VOLLRATH auf in die Teilvariablen Zuordnung, Reihenfolge, Verbindung und Akzentuierung. Die Variable "Zuordnung" bewirkt eine Verteilung der Lehrplaninhalte auf Unterrichtseinheiten und ist eng mit der Variablen "Auswahl" verknüpft. Ich möchte mich nun der Variablen "Verbindung" zuwenden.

Hierbei denkt man insbesondere an Verbindungen des jeweiligen mathematischen Inhalts mit anderen, auch außermathematischen Themenkreisen, also etwa an das, was man mit FREUDENTHAL "Beziehungshaltigkeit" nennt. Hier wird man noch auf konkrete Unterrichtsvorschläge warten dürfen, erwähnt sei der Vorschlag von HENN zur

"Theorie des Regenbogens". Unter Berücksichtigung der anfangs erwähnten administrativen Einengungen wird es aber gar nicht so leicht sein, derartige Vorschläge zu realisieren, d.h. der Lehrer wird vermutlich nicht genügend Freiraum zur Ausgestaltung dieser methodischen Variablen haben.

"Verbindung" läßt sich aber m.E. auch ganz anders erreichen, nämlich durch eine Methode, die ich als

historische Verankerung

bezeichnen möchte. Hierbei möchte ich, wie TOEPLITZ es 1926 nannte, an die "Wurzeln der Begriffe" zurückgehen, damit der "Staub der Zeiten" von ihnen abfalle und sie als "wieder lebensvolle Wesen vor uns erstehen". TOEPLITZ selbst nannte dieses die "genetische Methode", aber hierunter verstehen wir heute etwas anderes, und daher scheint mir der Begriff "historische Verankerung" angebracht. Ich habe diesen Begriff bereits vor einiger Zeit geprägt; inzwischen konnte ich zu meiner Genugtuung feststellen, daß die neuen niedersächsischen Rahmenrichtlinien etwas Ähnliches vorsehen ([13],S.6): "An geeigneten Problemen sollen im Unterricht historische Entstehungsprozesse aufgezeigt werden und die Leistungen bedeutender Mathematiker gewürdigt werden." Durch diese Methode wird zugleich eine innermathematische Beziehungshaltigkeit realisiert: Ich möchte nämlich für die Verwendung historischer Beispiele plädieren, die sich als tragfähige Bausteine einer Unterrichtseinheit erweisen. Dabei sollten diese Beispiele aus ökonomischen Gründen in heutiger Form präsentiert werden.

Beispiel 1: Zur Irrationalität

Die Irrationalität führt man gerne am Beispiel der Inkommensurabilität von Diagonale und Seite eines Quadrats, also von $\sqrt{2}$, ein. Hierfür gibt es zwei Beweise, die auf die Pythagoreer zurückgehen, und so liegt offenbar eine schöne historische Verankerung vor. Der eine, indirekte Beweis ist zahlentheoretischer Art und besitzt schon ein hohes Abstraktionsniveau, der andere ist geometrisch und liegt keinesfalls auf der Hand.

Neben dieser beweistechnischen Problematik ist vor allem unbefriedigend, daß der erste Anlauf zur Irrationalität über die Zahl $\sqrt{2}$

erfolgt und diese Zahl dann auch leicht als Prototyp für irrationale Zahlen bei den Schülern hängen bleibt. In der Tat wurde die Irrationalität nicht am Beispiel der Zahl $\sqrt{2}$, sondern durch HIPPASOS von Metapont (um 450 v. Chr.) am regelmäßigen Fünfeck entdeckt (vgl. [6]). Diese Entdeckung möchte ich hier skizzieren.*)

Das Pentagramm (Drudenfuß) war als mystisches Symbol das Erkennungszeichen der Pythagoreer. In diesem erkennen wir als Teilfigur ein reguläres Fünfeck. Verbinden wir die Sternspitzen durch einen Streckenzug, so erhalten wir ein größeres reguläres Fünfeck (Fig. 3).

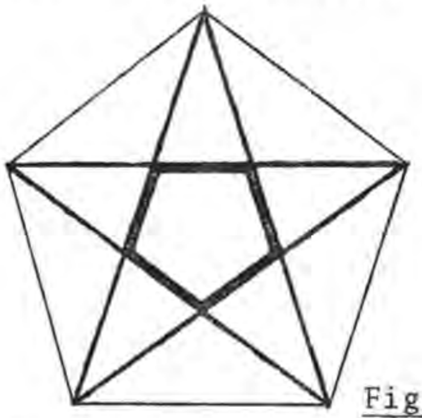


Fig. 3

HIPPASOS wies nun nach, daß Seite und Diagonale inkommensurabel sind. Der Beweis sei angedeutet:

(1) Jedem Fünfeck wird ein kleineres zugeordnet, das als Diagonalenschnittfigur entsteht. Dies geht ad infinitum (Fig. 3 und Fig. 6).

(2) Nimmt man a von b "weg", c := b-a, und dann c von a, d := a-c, so sind c bzw. d Diagonale bzw. Seite des nächsten Fünfecks (Fig. 4).

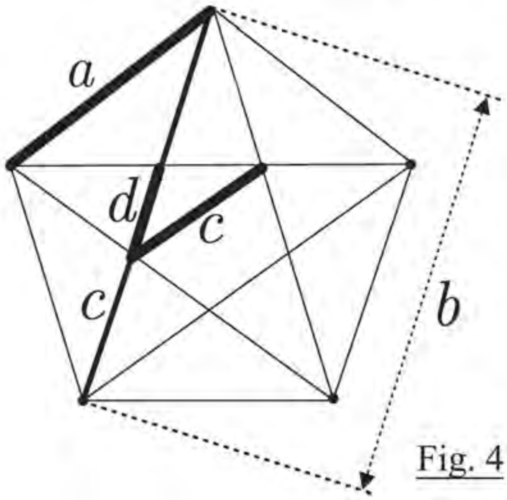


Fig. 4

(3) Der Algorithmus (2) heißt "Wechselwegnahme". Er war den Handwerkern schon lange vor den Pythagoreern bekannt und diente zum Auffinden eines gemeinsamen Maßes. Wir nennen das heute "Euklidischen Algorithmus". Bei kommensurablen Größen bricht dieser Algorithmus ab. Da (2) offensichtlich nicht abbricht, sind Seite und Diagonale inkommensurabel.

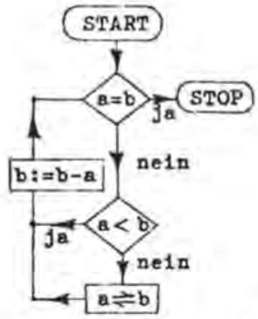


Fig. 5: Der Algorithmus "Wechselwegnahme"

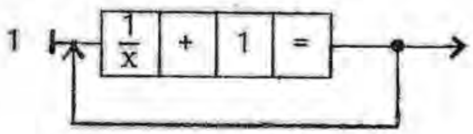
*) Hierzu s.a. ARTMANN: Aktivitäten mit dem regelmäßigen Fünfeck. MU 28(1982),H.4

Anknüpfungen

a) Mit $b = k \cdot a$ (k Streckfaktor) weiß man, daß $k \notin \mathbb{Q}$ ist, obwohl k noch unbekannt ist. Über den Goldenen Schnitt entdeckt man $k = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$ und weiß damit, daß $\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) \notin \mathbb{Q}$ ist, was zu $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$ weiter diskutiert werden kann.

b) Es ist $a = \frac{1}{k} \cdot b$, was auf $\frac{1}{k} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = k - 1$, also $k = 1 + \frac{1}{k}$ führt. Das wiederum liefert $\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}$,

was eine schnelle Approximation von $\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$ mit dem Taschenrechner erlaubt ($\frac{1}{x}$-Taste).



Hier bietet sich auch die Gelegenheit, etwas über Kettenbrüche zu erzählen und diesen Begriff historisch zur verankern (Zahnradmodell von HUYGENS). Literatur: [6], [10], [12].

c) In zweifacher Weise wird der Folgenbegriff vorbereitet:
1) Die Folge der Fünfecke (Fig. 6 und Fig. 7).
2) Die Folge der Näherungsbrüche.
Insbesondere wird auch der Konvergenzbegriff exemplarisch vorbereitet.

d) Eine weitere historische Verankerung bildet die FIBONACCI-Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, für die $\lim \langle \frac{a_{n+1}}{a_n} \rangle = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$ gilt. Literatur: [14], [18], [4] (Kap. 11).

Diese Andeutungen mögen vielleicht genügen, um deutlich zu machen, daß diese historische Verankerung auch in einem spiraligen Aufbau nutzbar gemacht werden kann:
In einem propädeutischen Anlauf für die Begriffe Irrationalität, Folge, Konvergenz und in einem späteren Durchlauf bei vertiefender Behandlung.

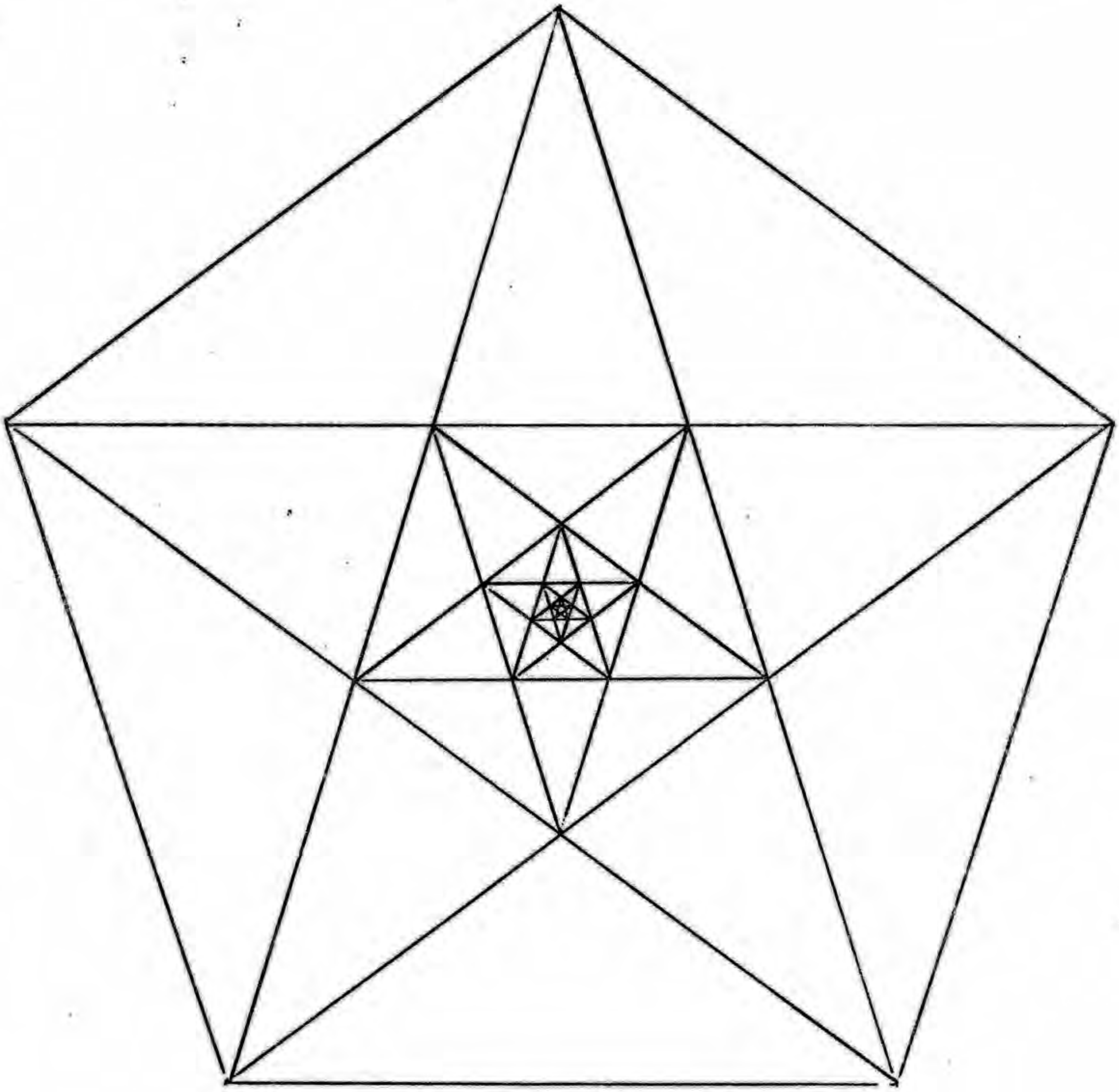


Fig. 6

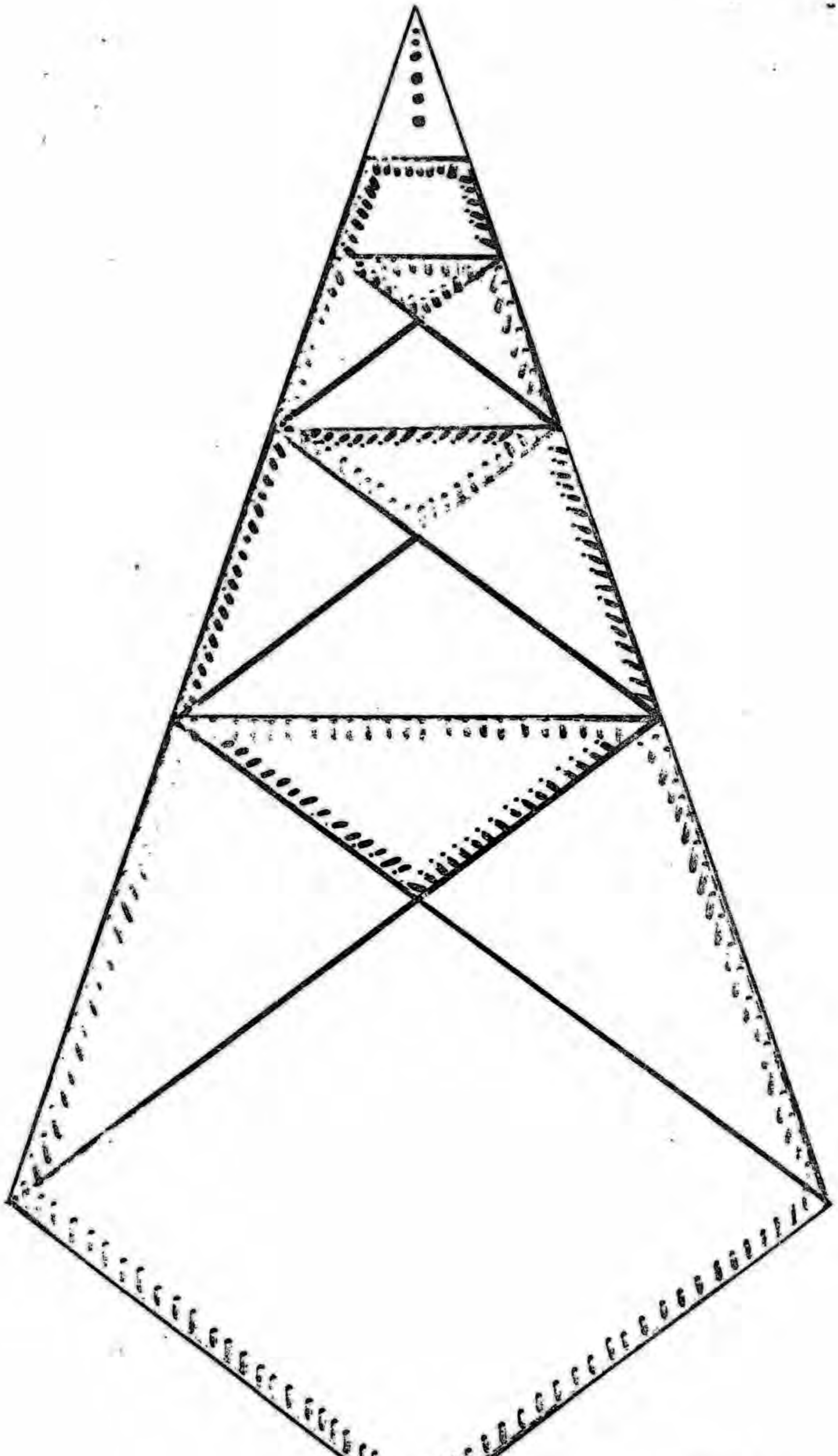


Fig. 7

Dieses Beispiel war mehr lokaler Art, d.h. es bezieht sich auf kurze Unterrichtsphasen. Das nächste Beispiel dagegen ist mehr global, es bezieht sich auf eine größere Unterrichtseinheit.

Beispiel 2: Zum Thema Folgen und Reihen

An dem Gymnasium, an dem ich unterrichte, war für das (damals noch übliche) Vorsemester der Oberstufe ein dreistündiger Grundkurs mit dem Thema "Folgen und Reihen" verbindlich vorgesehen. Neben der Erarbeitung dieser Begriffe gehören hierhin vollständige Induktion, Monotonie, Beschränktheit, Konvergenz und auch spezielle Folgen bzw. Reihen. Für mich ging es darum, wie ich innerhalb des gesetzten Rahmens meinen Stil wählen konnte. Ich löste das durch mehrfache historische Verankerungen und erhielt dadurch ein tragfähiges Konzept für diesen Vorsemesterkurs. Ich berichtete den Schülerinnen zunächst von den sexagesimalen $\sqrt{2}$-Approximationen der Babylonier, z.B. $1+\frac{25}{60}$, und teilte ihnen mit, daß sie bereits ein Verfahren zur Berechnung derartiger Näherungswerte besaßen, was das Interesse der Schülerinnen weckte. Die Antwort darauf blieb ich zunächst schuldig. Ich berichtete ferner, daß Pythagoras von den Babyloniern die Kenntnis dreier Proportionen mitgebracht hatte, mit denen drei sogenannte Mittelwerte erklärt waren, nämlich arithmetisches, geometrisches und harmonisches Mittel. Sind nämlich in unserer Formulierung $a,b,x \in \mathbb{R}^+$ mit $a < x < b$, so gilt:

$$x \text{ ist } \left\{\begin{array}{l}\text{arithmetisches}\\ \text{geometrisches}\\ \text{harmonisches}\end{array}\right\} \text{Mittel von } a \text{ und } b\text{, wenn } \frac{x-a}{b-x} = \left\{\begin{array}{l}\frac{a}{a}\\ \frac{a}{x}\\ \frac{a}{b}\end{array}\right. .$$

Das lösten wir jeweils nach x auf und erhielten $A(a,b) = \frac{a+b}{2}$, $G(a,b) = \sqrt{ab}$, $H(a,b) = \frac{2ab}{a+b}$, und mittels der Definitionsgleichungen ergab sich leicht $a < H(a,b) < G(a,b) < A(a,b) < b$ für $a < b$. Unter Verwendung der musikalischen Proportion $\frac{H(a,b)}{a} = \frac{b}{A(a,b)}$, die wir natürlich musikalisch deuteten, erhielten wir $G(H(a,b),A(a,b)) = G(a,b)$, und das lieferte einen Approximationsalgorithmus für $\sqrt{c}$, wenn man a,b mit $ab = c$ wählt. Wir konnten damit das Ergebnis der Babylonier nachrechnen und setzten weiterhin für diesen Algorithmus den Taschenrechner erfolgreich ein.

Durch das "Aufeinanderfolgen" der Näherungswerte wurde der Folgenbegriff eingeführt, und mittels der drei Mittelwerte kamen wir zu den Begriffen arithmetische, geometrische und harmonische Folge, die also zunächst rekursiv erklärt waren.
Die rekursive Eigenschaft wurde als wesentlich für die Menge $\mathbb{N}$ erkannt und führte über die Formulierung des Induktionsaxioms zum Beweisverfahren der vollständigen Induktion, womit wir dann schon zuvor vermutete Formeln für das allgemeine Glied einiger spezieller Folgen beweisen konnten.

Eine weitere historische Verankerung begann ich mit dem Erzählen über Punktfiguren auf Töpfereien der Jungsteinzeit, die später bei den Pythagoreern als <u>figurierte Zahlen</u> große Bedeutung erlangen, z.B. die <u>heilige Tetraktys</u>

```
   o
  o o
 o o o
o o o o ,
```

die die vierte Dreieckszahl darstellte. So gelangten wir über Summenformeln zum Summenzeichen und damit zum Reihenbegriff.
Der mittlerweile umfangreich gewordene Beispielvorrat an Folgen und Reihen führte durch Klassifizierung zu den Begriffen Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz. Den Abschluß bildete eine Rückbesinnung auf den Approximationsalgorithmus für Quadratwurzeln, der nunmehr in Folgenschreibweise formuliert wurde, so daß wir die Konvergenz dieses Verfahrens jetzt beweisen konnten.

Die Schülerinnen wurden so nicht mit isolierten Themen konfrontiert, sondern sie erlebten durch mathematikhistorische Beziehungshaltigkeit einen inneren Zusammenhang, der sie schließlich an den Ausgangspunkt der Betrachtungen zurückführte und diesen in neuem Licht erscheinen ließ.

Mir ist bewußt, daß meine Überlegungen zu der sog. "historischen Verankerung" möglicherweise nicht sehr originell sind, weil vielleicht schon zahlreiche Mathematiklehrer so vorgehen. Das würde mich sehr freuen. Ich möchte mich hiermit ja auch vor allem an diejenigen wenden, die dieses als methodische Möglichkeit noch nicht erkannt haben.

Konsequenzen für die Lehreraus- und -weiterbildung

Die eben geschilderte Methode läßt sich aber nur dann verwenden, wenn dem Lehrer hierfür geeignetes Material zur Verfügung steht, aus dem er nach Belieben schöpfen kann, sei es zur lokalen Bereicherung einer Unterrichtsphase wie im ersten Beispiel, oder sei es zur globalen Verwendung wie in Beispiel 2. In diesem Zusammenhang kann ich die Bücher von BARON [1] und von BOYER [2] wärmstens empfehlen. Deutsche Übersetzungen wären sehr wünschenswert. Darüber hinaus ergeht meine Aufforderung an die Mathematikdidaktiker, hier kreativ tätig zu werden und für die Lehrer geeignetes Material in geeigneter Form zusammenzustellen. Erwähnt werden muß ferner das Kursheft von STOWASSER und MOHRY über "Rekursive Verfahren" [14], das stark historisch verankert ist und sogar den Ansprüchen eines Leistungskurses genügen kann.

3. Zur Begriffsentwicklung in Unterrichtsphasen:

"Verbot des Unerwünschten"

Ich möchte nun wie angekündigt zur anderen Klasse der methodischen Variablen, nämlich den Unterrichtsphasen, übergehen, und zwar speziell zur Begriffsentwicklung.
Eine Aufgabe des Analysisunterrichts ist unter anderem die Entwicklung von Begriffen wie Grenzwert, Stetigkeit und Differenzierbarkeit. Innerhalb dieser Begriffsentwicklung müssen wir verschiedene Stufen unterscheiden, und zwar zum einen die
Einführung des Begriffs und zum anderen die
Definition des Begriffs.
Hierzu zunächst eine Synthese der betreffenden Darstellungen in [3], [5], [17] (vgl. Fig. 8):

a) Bei der Einführung wird der Schüler durch Vorlegen von Beispielen und Gegenbeispielen im Rahmen sogenannter "gelenkter Entdeckung" mit Inhalt und Umfang des neuen Begriffs vertraut gemacht. Durch sogenanntes "Sortieren" gelangt er zu einer "Klassifikation" von Beispielen nach geeigneten Merkmalen, d.h. er gewinnt diesen Begriff durch Klassenbildung, also durch Abstrahieren.

Begriffsentwicklung in Unterrichtsphasen

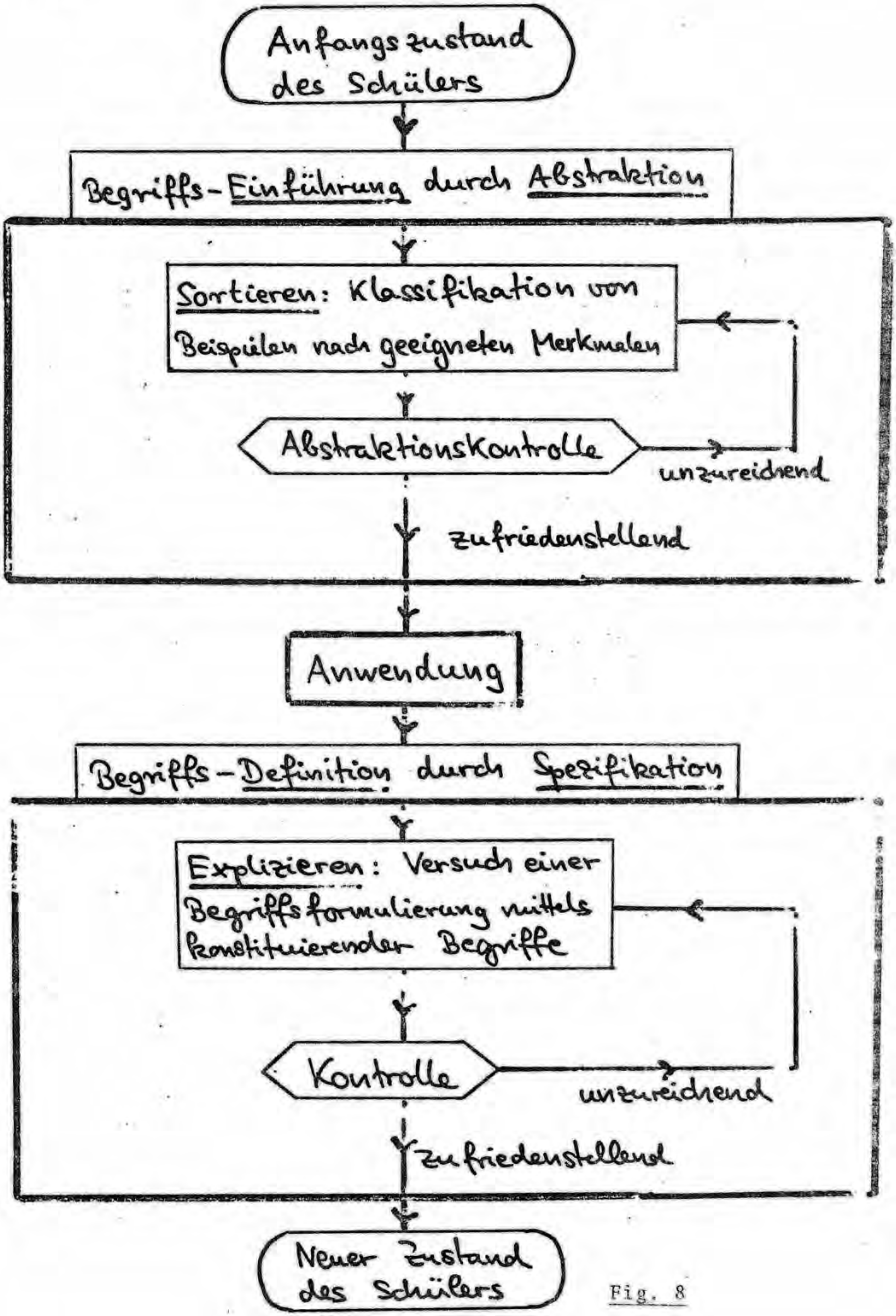


Fig. 8

b) Nach zufriedenstellender Abstraktionskontrolle versucht man, diesen Begriff auf schwierigere Fälle anzuwenden, was eine Präzisierung der Begriffsvorstellung erfordert. Das geschieht dann in einer Definition. Dieses Begriffsfestlegen nennt man auch Explizieren. In dieser Phase versucht man, den Begriff mittels bekannter, sogenannter konstituierender Begriffe durch Spezifizieren festzulegen. Nach zufriedenstellender Kontrolle ist man dann von dem jeweiligen Anfangszustand, der durch das Vorwissen des Schülers gegeben ist, zu einem neuen Zustand gelangt.

In der Praxis treten vor allem Probleme beim Explizieren auf: Wie soll man methodisch vorgehen, um eine Definition zu erarbeiten? Der naheliegende und übliche Weg ist die direkte formale Kennzeichnung des Begriffs.
Andererseits wurde ja in der Sortierphase eine Einteilung in die Klasse für den Begriff und die Klasse für den Komplementärbegriff vorgenommen. So könnte man ersatzweise versuchen, den Komplementärbegriff zu charakterisieren und durch logische Negation daraus eine Definition für den Begriff zu erhalten, was unter Umständen leichter sein kann.
In diesem Sinne hat KROLL 1976 vorgeschlagen, anstelle der Stetigkeit zunächst die Unstetigkeit zu definieren. Ich selbst habe ebenfalls 1976 eine derartige Methode für die Behandlung der Differenzierbarkeit vorgeschlagen und das damals "Verbot des Unerwünschten" genannt. Diese Methode ist gewiß kein Allheilmittel, aber den Lehrern sollte diese indirekte Explikationsmöglichkeit als Alternative zur direkten bewußt gemacht werden.

Darüber hinaus möchte ich erwähnen, daß die Methode "Verbot des Unerwünschten" auch bei Begriffsbildungen im Rahmen sogenannter axiomatischer Charakterisierungen Anwendung finden kann.
Will man z.B. das Induktionsaxiom als Grundlage für das Beweisverfahren "vollständige Induktion" erarbeiten, so gehe man etwa wie folgt vor:

(1) Die Schüler sind nach eingehender Diskussion "überzeugt", daß $\mathbb{N}^*$ die Eigenschaft $1 \in \mathbb{N}^*$ und die "Nachfolgereigenschaft" $\bigwedge_n (n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n+1 \in \mathbb{N}^*)$ hat.

(2) Auch z.B. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ haben eine solche Eigenschaft, aber:

Sie besitzen eine echte Teilmenge T mit $1 \in T$ und

$\bigwedge_n (n \in T \Rightarrow n+1 \in T)$, formal: $\bigvee_{T \subseteq \mathbb{Z}} (1 \in T \wedge \bigwedge_n (n \in T \Rightarrow n+1 \in T) \wedge T \neq \mathbb{Z})$.

(3) Damit erlangen die Schüler folgende Überzeugung:

$\mathbb{N}$ besitzt diese Eigenschaft nicht, also:

$\bigwedge_{T \subseteq \mathbb{N}} (1 \in T \wedge \bigwedge_n (n \in T \Rightarrow n+1 \in T) \Rightarrow T = \mathbb{N})$.

Damit haben wir in (3) das Prinzip vom "Verbot des Unerwünschten" benutzt.

4. Zusammenfassung

Meine Absicht war, in diesem Vortrag auf Freiräume bei der methodischen Gestaltung des Analysisunterrichts aufmerksam zu machen. Ich habe mich hierbei auf die Konkretisierung zweier methodischer Variablen beschränkt und für deren konkrete Belegungen die Schlagwörter

"historische Verankerung"

und

"Verbot des Unerwünschten"

geprägt.

Diese Begriffe sind einerseits so zu verstehen, daß sie eine methodische Einstellung beim praktizierenden Lehrer ermöglichen sollen, denn gerade an diesen möchte ich mich wenden. Auch mag vornehmlich der zweite Begriff für eine bewußte arbeitsmethodische Haltung des Schülers geeignet sein.

Andererseits beabsichtige ich mit diesen Begriffen eine Aktivierung der Didaktiker, um diese Begriffe durch Zusammentragung diverser Beispiele mit Leben zu erfüllen.

Literatur:

[1] BARON, M.: The origins of the Infinitesimal Calculus. Pergamon Press, Oxford/Braunschweig 1969.

[2] BOYER, C.: A History of Mathematics. Wiley, New York 1968.

[3] BOCK, H./GIMPEL, M.: Probleme, die beim Definieren mathematischer Begriffe auftreten. In: BOCK, H./WALSCH, W.: Zum logischen Denken im Mathematikunterricht. Volk und Wissen, Berlin 1975.

[4] COXETER, H.S.M.: Unvergängliche Geometrie. Birkhäuser, Basel 1963.

[5] DORMOLEN, J.v.: Didaktik der Mathematik. Vieweg, Braunschweig.

[6] Enzyklopädie der Elementarmathematik, Band I. Verlag der Wiss., Berlin 1977.

[7] FRITZ, K.v.: Die Entdeckung der Inkommensurabilität durch Hippasos von Metapont. In: Zur Geschichte der griechischen Mathematik. Wiss. Buchgesellschaft, Darmstadt 1965. (Nachdruck aus Annals of Mathematics 46 (1945), 242-264).

[8] HISCHER, H.: Eine "Herleitung" der Lipschitz-Differenzierbarkeit. Vortrag im Mathem. Forschungsinstitut Oberwolfach, 1976.

[9] HISCHER, H./SCHEID, H.: Materialien zum Analysisunterricht. Herder, Freiburg 1982.

[10] KHINTCHINE, A.: Kettenbrüche. Teubner, Leizig 1956.

[11] KROLL, W.: Differentialrechnung. Dümmler, Bonn 1976.

[12] PERRON, G.: Irrationalzahlen. DeGruyter, Berlin 1960.

[13] Rahmenrichtlinien für das Gymnasium, Klasse 7-10, Mathematik. Herausgeg. vom Niedersächsischen Kultusminister (Juli 1980).

[14] STOWASSER, R./MOHRY, B.: Rekursive Verfahren. Schroedel, Hannover 1978.

[15] TOEPLITZ, O.: Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung. Springer, Berlin 1949.

[16] VOLLRATH, H.-J.: Die Bedeutung methodischer Variablen für den Analysis-Unterricht. MU 22 (1976) 5, 7-24.

[17] WITTMANN, E.: Grundfragen des Mathematikunterrichts. Vieweg, Braunschweig 1981[6].

[18] WORBOBJOW, N.N.: Die Fibonaccischen Zahlen. Dt. Verlag der Wiss., Berlin 1971.