Universität des Saarlandes

Fachrichtung 6.1 – Mathematik

Preprint Nr. 110

# Mittenbildung als fundamentale Idee

Horst Hischer

Saarbrücken 2004

Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Universität des Saarlandes

Preprint No. 110
submitted: September 17, 2004

# Mittenbildung als fundamentale Idee

**Horst Hischer**

Universität des Saarlandes
Fachrichtung Mathematik
Postfach 15 11 50
D–66041 Saarbrücken
Germany
hischer@math.uni-sb.de

Edited by
FR 6.1 — Mathematik
Universität des Saarlandes
Postfach 15 11 50
66041 Saarbrücken
Germany

Fax: + 49 681 302 4443
e-Mail: preprint@math.uni-sb.de
WWW: http://www.math.uni-sb.de/

# Mittenbildung als fundamentale Idee

von Horst Hischer

## 1 Fundamentale Ideen als curriculare Strukturierungshilfe — Grundsätzliches

*[...] daß die basalen Ideen, die den Kern aller Naturwissenschaft und Mathematik bilden, und die grundlegenden Themen, die dem Leben und der Dichtung ihre Form verleihen, ebenso einfach wie durchschlagend sind.*

*Jerome Seymour Bruner 1970 in seinem Buch „Der Prozeß der Erziehung"*

Hiermit begann eine bis heute anhaltende erziehungswissenschaftliche Diskussion über die Bedeutung der sog. *fundamentalen Ideen* für die Planung und Gestaltung des Unterrichts, insbesondere auch des Mathematikunterrichts, wobei dann nicht nur weitere Bezeichnungen wie etwa *zentrale Ideen* oder *universelle Ideen* anzutreffen sind, sondern sich mit diesen durchaus auch unterschiedliche intentionale Akzentuierungen verbinden.

Für die Mathematikdidaktik bietet [Schweiger 1992] einen fundierten Überblick über die anzutreffende Reichhaltigkeit der Auslegungen dieses Begriffs. Insbesondere stellt er *wesentliche gemeinsame Aspekte* der unterschiedlichen Auffassungen über fundamentale Ideen heraus, die zu *Kriterien* über fundamentale Ideen führen (können). [1] Hieran anknüpfend wird in [Hischer 1998] betont, dass *deskriptive* und *normative* Kriterien zu unterscheiden sind, also einerseits solche, die der Auffindung fundamentaler Ideen dienen (können), andererseits solche, die Erwartungen im Sinne einer *curricularen Strukturierungshilfe* zum Ausdruck bringen; zugleich wird die damit verbundene didaktische Intention exemplarisch an dem Prozess der Mittelwert*bildung* konkretisiert.

[Schweiger 1992, 207] hebt hervor:

> Eine fundamentale Idee ist ein Bündel von Handlungen, Strategien und Techniken [...].

Dieser *Aspekt der Handlung* (wozu auch *Strategien* und *Techniken* zu zählen sind) ist als *wesentlich* für fundamentale Ideen anzusehen [2] – sowohl im deskriptiven als auch im normativen Sinn! Demgemäß können beispielsweise weder „Zahl" noch „Algorithmus" für sich bereits (also ohne das *Zählen* bzw. ohne das *Algorithmieren*) fundamentale Ideen sein. Als Konsequenz dieser Auffassung sind dann *fundamentale Ideen* und *grundlegende Begriffe* zu unterscheiden – wobei Ideen ohne Begriffe kaum denkbar sind, genauer: *Fundamentale Ideen beziehen sich auf grundlegende Begriffe!* Damit können wir nicht bereits in den „Mittelwerten" selbst eine fundamentale Idee sehen, sondern ihre *Bildung* muss hinzugenommen werden und damit also auch die *Handlung*!

[Heymann 1996] nennt sechs „zentrale Ideen", die auch (leicht modifiziert) in die „Bildungsstandards" der KMK [3] Einzug gehalten haben, nämlich die *Idee* der *Zahl*, des *Messens*, des *funktionalen Zusammenhangs*, des *räumlichen Strukturierens*, des *Algorithmus* und des *mathematischen Modellierens*. Auch wenn sie nicht alle als „Handlung" erscheinen (s. o.), erfüllen sie die *deskriptiven Kriterien* für fundamentale Ideen (Abschnitt 4). Jedoch passt die Idee der *Mittelwertbildung* nicht in diesen Rahmen, denn sie ist trotz ihrer Vagheit konkreter als die o. g. „zentralen Ideen". Andererseits ist sie wegen dieser Konkretheit unterrichtsnäher als die eher *zu* allgemeinen „zentralen Ideen“, die wiederum wegen ihrer Allgemeinheit und damit geringen Anzahl geeignet sind, in knapper Form grundsätzliche inhaltliche Aspekte des Mathematikunterrichts zu benennen. Das führt zu der **These**, dass es *fundamentale Ideen auf zumindest zwei verschiedenen, prinzipiell offen zu denkenden Ebenen mit unterschiedlichem Konkretisierungsgrad* gibt, und die Mittelwertbildung gehört dann zu solch einer zweiten, „konkreteren“ Ebene, die mit der ersten *curricular zu vernetzen* ist (vgl. [Hischer 1998], [Hischer 2003]): [4]

**Ebene 1** (allgemein): *Zählen*, *Messen*, *räumliches Strukturieren*, *Algorithmieren*, ...

**Ebene 2** (konkreter): *Mittelwertbilden*, *Linearisieren*, *Optimieren*, ...

Am Beispiel der *Mittelwertbildung* – bzw. verallgemeinert: der *Mittenbildung* – soll nun skizziert werden, was unter *deskriptiven* bzw. *normativen* Kriterien bei fundamentalen Ideen zu verstehen ist. Dazu zunächst ein Beispiel.

## 2 Ein Paradoxon — oder: das Chuquet-Mittel

Abb. 1 zeigt ein Bewertungsergebnis einer fiktiven, nur aus zwei Aufgaben bestehenden, Klausur: Der Aufgabensteller (der zugleich Referent sei) hat bei der ersten Aufgabe 16 erreichbare Punkte vorgesehen, bei der zweiten hingegen aus guten Gründen gar 48. Da es bei der Bewertung ohnehin nur auf den prozentualen Anteil der erreichten Punkte ankommt, ist diese differenziertere Punktvergabe für ihn per saldo ohne Belang. Bei einer Mindestgrenze von z. B. bei 40 % der erreichbaren Punkte für die Note „ausreichend“ hätte der Kandidat noch Glück gehabt. Die Korreferentin hält nun bei Aufgabe 1 eine feinere Punktverteilung für angemessen, und sie verdoppelt die Anzahl der erreichbaren Punkte. Für sie ist dies ebenfalls mit Blick auf eine gerechte Bewertung per saldo ohne Belang. So vergibt sie dann bei der ersten Aufgabe 7 anstelle der erwarteten 6 Punkte (Abb. 2), ferner hält sie bei der zweiten Aufgabe einen weiteren „vergessenen“ Punkt für angemessen. *Beide Aufgaben* werden also von ihr *besser bewertet* als vom Referenten, aber *paradoxerweise* ist ihre *Gesamtbewertung schlechter* als beim Referenten!

**Abb. 1**

| 1. Korrektur | Aufg. 1 | Aufg. 2 | Summe |
|---|---|---|---|
| erreichbare Punkte | 16 | 48 | 64 |
| erreichte Punkte | 3 | 23 | 26 |
| Anteil an Aufgabe | 18,8% | 47,9% | 40,6% |

**Abb. 2**

| 2. Korrektur | Aufg. 1 | Aufg. 2 | Summe |
|---|---|---|---|
| erreichbare Punkte | 32 | 48 | 80 |
| erreichte Punkte | 7 | 24 | 31 |
| Anteil an Aufgabe | 21,9% | 50,0% | 38,8% |

In Abwandlung einer Formulierung von [Meyer 1994] bedeutet dies: *Man kann global verlieren, obwohl man überall lokal gewinnt!* Dieser Sachverhalt ist in der Statistik im Zusammenhang mit Kontingenztafeln auch als „Simpson-Paradoxon“ bekannt. [5]

Wir beachten: Ein *Paradoxon* ist von einer *Antinomie* zu unterscheiden: Zwar liegt in beiden Fällen ein *Widerspruch* vor, jedoch mit folgendem wesentlichen Unterschied: Die Antinomie offenbart einen *unauflösbaren Widerspruch*, der gewissermaßen „systemimmanent“ ist (z. B.: Russelsche Antinomie der Mengenlehre), hingegen stellt das Paradoxon nur einen *scheinbaren Widerspruch* dar, der also prinzipiell auflösbar ist (z. B.: Wettlauf von Achilles mit der Schildkröte). Typisch für Paradoxa ist nun, dass diese scheinbaren Widersprüche nicht nur von einzelnen Menschen aufgrund etwa persönlicher unzureichender Denkfähigkeit gesehen werden, sondern dass sie für nahezu alle Menschen gleichermaßen auftreten.

Nach [Jahnke 1993] begeht unsere sonst erfolgreiche kognitive Struktur offenbar einen spontanen für sie typischen „lokalen Fehler“: Wir verfügen wohl über *grundlegende Vorstellungen*, auf die sich unser Denken und unsere Intuition stützen – „grundlegend“ in der Weise, dass diese Vorstellungen mit den Kernaussagen in diesen Paradoxa nicht zu vereinbaren sind, unser Denken sich also gegen solche Widersprüche „auflehnt“.

Bei dem Simpson-Paradoxon sieht [Jahnke 1993] nun *zwei grundlegende Vorstellungen* als konstitutiv für das Entstehen dieses Widerspruchs an: „Mittelwertbildung“ einerseits und „Steigung“ bzw. „Wachstum“ andererseits. Betrachten wir daraufhin erneut das Beispiel der ersten Klausurkorrektur in Abb. 1, so wird die Gesamtbewertung durch eine *Mittelwertbildung* beider Einzelbewertungen wie folgt erreicht:

$$\frac{3}{16} \oplus \frac{23}{48} = \frac{26}{64}\ ,\ \text{allgemein:}\ \frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}.$$

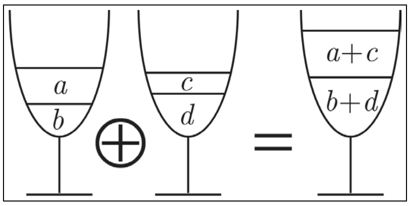
Diese bekanntlich „falsche Bruchaddition“ ist aber manchmal durchaus sinnvoll, und der französische Arzt Nicolas Chuquet formulierte sie bereits im Jahre 1484 in seinem Buch „Triparty en la science des nombres“ ([Boyer 1968, 304], [Cantor 1892, 318]) als *Regel der mittleren Zahlen* – in heutiger Notation für beliebige positive Zahlen $a$, $b$, $c$, und $d$:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

Die Gültigkeit dieser Ungleichungskette lässt sich durch elementare Termumformungen leicht nachweisen. Da der „Summenbruch“ zwischen den beiden Ausgangsbrüchen liegt, ist er als ein *Mittelwert* zwischen diesen anzusehen, der aus historischen Gründen „**Chuquet-Mittel**“ heißt. Chuquets „Mittelwertregel“ ist für die „Schorle-Aufgabe“ hilfreich:

- *Zwei Schorlegläser mit jeweils bekanntem Mischungsverhältnis aus Wein und Selters werden zusammengeschüttet. Welches resultierende Mischungsverhältnis ergibt sich?*

**Abb. 3**




Das Chuquet-Mittel liefert die gesuchte Antwort (in Abb. 3), wobei das Mischungsverhältnis zwischen den beiden Ausgangswerten liegt – und als „Mitte“ durch den Geschmackssinn erfahrbar ist.

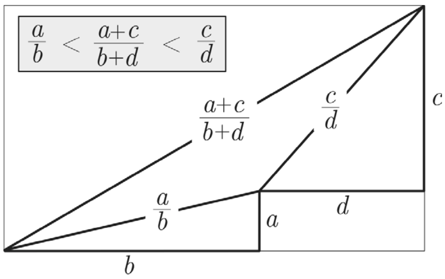



**Abb. 4**

Diese Mittelwertregel lässt sich auch visuell beweisen, indem man die Brüche als *Steigungen von Strecken* interpretiert (Abb. 4 [6]): Der Summenbruch erscheint als *Steigung der Verbindungsstrecke* und damit als *„mittlere Steigung“*.

Zurück zum „Klausurparadoxon“: Wenn wir bei Aufgabe 1 die Anzahl der erreichbaren Punkte verdoppeln, so ergibt sich $\frac{6}{32} \oplus \frac{23}{48} = \frac{29}{80}$, und es folgt $\frac{26}{64} = \frac{130}{320} > \frac{126}{320} = \frac{29}{80}$ !

Diese merkwürdige „Bruchaddition“ ist also abhängig von der speziellen Bruchdarstellung, genauer: Es ist gar nicht möglich, eine „Addition“ von Brüchen auf diese Weise eindeutig zu erklären, weil das Ergebnis nicht unabhängig von der jeweiligen Bruchdarstellung ist – diese „Addition“ ist nämlich bekanntlich *nicht „wohldefiniert“* (d. h.: *nicht repräsentantenunabhängig*). Hier begegnen wir der kontextabhängigen Doppeldeutigkeit des Begriffs „Bruch“, die für viele Verständnisschwierigkeiten verantwortlich ist und die wir auch nicht „hinweg definieren“ können: nämlich der Deutung einerseits als Äquivalenzklasse und andererseits als ein Repräsentant dieser Äquivalenzklasse.

Die Chuquet-Mittel-Addition darf nur dann auf Brüche angewendet werden, wenn wir diese als *Repräsentanten* deuten, also als *geordnete Paare* aus Zähler und Nenner, während die betrachteten prozentualen Klausurbewertungen die Äquivalenzklassen dieser Repräsentanten sind. Zwar ist es in der Mathematik als Wissenschaft möglich und üblich, dieses Problem definitorisch zu beseitigen („Bruch" als Äquivalenzklasse von Zahlenpaaren), jedoch treten Brüche im „Rest der Welt" sowohl als Äquivalenzklasse als auch als Zahlenpaar und damit faktisch doppeldeutig auf. Aber selbst in der Mathematik werden Brüche teilweise nicht nur als Äquivalenzklassen, sondern auch (sic!) als Zahlenpaare aufgefasst, wobei diese Doppeldeutigkeit situativ richtig interpretiert wird. [7]

Wir können daher von zwei Brüchen in eindeutiger Weise das Chuquetmittel bilden, sofern wir diese als Repräsentanten auffassen, d. h. als durch Zähler und Nenner gegeben denken. Wenn wir jedoch mit den Brüchen bestimmte rationale Zahlen meinen, die mit ihrer Hilfe bezeichnet werden (sollen), so ist das Chuquetmittel zu *vage*, weil es ja unendlich viele Brüche gibt, die dieselbe rationale Zahlen bezeichnen. – Doch gerade wegen dieser *Vagheit* ergibt sich die Möglichkeit zur Erzeugung vielfältiger Mittelwertfunktionen! Das wird im letzten Abschnitt dieses Beitrags angedeutet.

# 3 Vagheit und Archetypizität von „Mittelwert" und „Mitte"

In Verallgemeinerung der (numerischen!) Mittel*werte* gibt es auch *nicht-numerische Mittel* bzw. *Mitten*, etwa in der Geometrie (z. B. Mittelpunkt, Seitenhalbierende, ...; vgl. [Lambert & Peters 2004]) und z. T. in der Stochastik (vgl. [Henze & Stummer 2004]). So müssen wir erneut feststellen, dass der Begriff der *Mittelwertbildung* in der Mathematik recht *vage* ist. Ferner ist die Idee der „Mittelwertbildung" auch *außerhalb der Mathematik* auffindbar – gewissermaßen als ein *Archetyp des Denkens*, wobei es auch dort nicht nur um *Mittelwerte und Mittelwertbildung* geht, sondern verallgemeinert um *Mitten und Mittenbildung*, so z. B. in der Physik ([Lambert & Peters 2004]) und in der Musik ([Hischer-Buhrmester 2004]).

*Mittel* kommt von „mittlerer Teil" – aber was ist das eigentlich? Diese Angabe ist im Alltagsdenken so vage und unpräzise wie etwa die „größere Hälfte", und dennoch (oder gerade deshalb?!) können wir auf diese Weise im Alltag erfolgreich kommunizieren. „Mittel" tritt zwar auch im Sinne von „vermittelnd" auf, aber wir bleiben hier bei der Bedeutung, die mit der „Mitte" verknüpft ist und die wir z. B. auch in *Mittag* als der „Mitte des Tages" und nicht etwa nur in der präzisen Angabe „12.00 Uhr" wiederfinden.

Nun kennen wir z. B. die „goldene Mitte", die aber doch nur eine „gute" oder „schöne" Position bzw. eine Situation „zwischen zu viel und zu wenig" meint, somit also subjektiv geprägt und damit sehr vage ist. Und wenn wir gar jemanden „aus unserer Mitte" meinen, dann ist dies einerseits unpräzise, und andererseits sagen wir das im Sinne von: »*Er oder sie „gehört zu uns"*«. So sehen wir bereits an diesen wenigen Alltagsbeispielen, wie sehr die „Mitte" archetypisch in unserem Denken verankert ist und wie gut wir zugleich (im Alltag!?) mit der Vagheit der dahinter stehenden Begriffe umgehen können.

Die „Mitte" begegnet uns auch in Wörtern anderer sprachlicher Herkunft, so etwa in dem *Zentrum* und neudeutsch auch im *Center*. Aber weder das *Stadtzentrum* noch das *Einkaufs-Center* sind präzise Ortsangaben, sondern sie sind jeweils *subjektiv wichtige Lagen*, die einer präzisen Koordinatisierung gar nicht bedürfen. Und dass die Mitte bzw. das Zentrum für die Menschen oft etwas besonders Wichtiges darstellen, sehen wir z. B. an den Bezeichnungen vom Typ *„...zentrisches Weltbild"*: Hiermit wird jeweils zum

Ausdruck gebracht, was aktuell im Mittelpunkt bzw. im Zentrum der Betrachtungen durch den Menschen steht, es wird also eine (subjektiv definierte!) Wichtigkeit betont. Einerseits wird hieran wieder der archetypische Charakter der Mitte deutlich, und andererseits sind all diese „Zentren“ keineswegs präzise. Wenn nun diese Beispiele für Mitten jeweils etwas dem Menschen besonders Wichtiges markieren und diese Wichtigkeit damit scheinbar zu einem wertvollen Merkmal der Mitte wird, müssen wir beachten, dass es auch die *Mittelmäßigkeit* gibt, von der wir (meist!) nur geringschätzig sprechen. [Hofstadter 1988, 773 f] widmet dieser Mittelmäßigkeit feinsinnige Ausführungen:

> Irgendwie kamen wir auf die Idee, ein Zahlenspiel für *drei* Personen zu spielen. Wir beschlossen, daß bei jedem Zug jeder von uns eine Zahl aus einem bestimmten Bereich wählen sollte; und da es uns zu öde schien, die größte Zahl gewinnen zu lassen, und auch zu öde, wenn die kleinste Zahl gewann, lag auf der Hand, daß die *Zahl in der Mitte* belohnt werden mußte. Wir entschieden also, daß bei jedem Zug das Punktekonto des „mittelmäßigsten“ Spielers einen Zuwachs erhalten sollte. [...]
>
> Nach fünf Zügen oder so verglichen wir dann unseren Punktestand, und der höchste ... Nein, Augenblick mal! Warum sollten wir die *höchste* Punktzahl gewinnen lassen? Damit setzten wir uns doch in Gegensatz zum Geist jedes einzelnen Spielzugs. Sollte der Geist des *Ganzen* dem der einzelnen Momente entsprechen, dann mußte [...] der Spieler mit dem Punktestand *in der Mitte* gewinnen! Wir nannten unser Spiel „Mittelmäßigkeit“ [...].

Zum einen wird deutlich, dass „Mitte“ archetypisch nicht nur positiv konnotiert in der Bedeutung von „besonders wichtig“ oder „zentral“ auftritt, sondern auch negativ konnotiert wie bei „mittelmäßig“ und also als „nicht besonders wichtig“, wobei es uns schwer fallen kann, diese Fokussierung bewusst als erstrebenswert und positiv anzusehen. Und andererseits wird auf die *Vagheit* von „Mitte“ oder „in der Mitte“ erneut hingewiesen: *Jede Zahl zwischen der kleinsten und größten gilt als mittlere!*

Die *Mitte* liegt in dieser allgemeinsten Auffassung nur *irgendwo zwischen zwei Rändern*, und diese Auffassung kommt z. B. im Chuquet-Mittel zum Ausdruck, wir finden sie bei den Pythagoreern, und sie führt zu einer Theorie der numerischen Mittelwerte! [8]

# 4 Deskriptive und normative Kriterien für fundamentale Ideen

Die hier (am Beispiel der Mittelwertbildung!) vorzustellenden Kriterien sind:

- deskriptive Kriterien: *Historizität, Archetypizität, Wesentlichkeit, Vagheit*
- normative Kriterien: *Durchgängigkeit, Transparenz*

**Historizität**: Die Idee der „Mittelwertbildung“ ist *in der historischen Entwicklung der Mathematik als Wissenschaft aufzeigbar*.

So zeigen kulturgeschichtliche Untersuchungen, dass das Bilden von Mittelwerten die Menschheit beschäftigt hat, solange wir schriftliche Überlieferungen haben – nämlich von den ersten Anfängen der Mathematik bei den Babyloniern vor rund 4000 Jahren über die Pythagoreer vor etwa 2500 Jahren bis in die heutige Zeit. [9]

**Archetypizität**: Die Idee der „Mittelwertbildung“ ist auch *außerhalb der Mathemati*k auffindbar – gewissermaßen als ein *Archetyp des Denkens*.

Dieser Aspekt ist kennzeichnend für viele Alltagsprobleme, so etwa für das Auftreten des Simpson-Paradoxons im Zusammenhang mit Statistiken und Durchschnittswerten, wobei *grundlegende Vorstellungen in uns allen* hierfür (mit) verantwortlich sind.

Erläutert man das Beispiel zur Klausurkorrektur ohne weitere Veranschaulichung Nicht-Mathematikern, so wird es als paradox empfunden. Die Mittelwertbildung ist also (u. a.!) insofern *archetypisch*, als man nicht Mathematik studiert haben muss, um die Paradoxie in diesem Beispiel (und entsprechenden anderen) zu spüren. Die Mathematik ist jedoch hilfreich bei der Auflösung dieses Widerspruchs. Und im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, dass neben der *Mittelwert*bildung auch die *Mitten*bildung jenseits der Mathematik als ein Archetyp des Denkens aufzufassen ist!

**Wesentlichkeit**: Die Mittelwertbildung gibt (zumindest partiell) Aufschluss über das *Wesen* der Mathematik.

Denn bei einer Analyse dessen, was „Mittelwerte“ sind, treten u. a. folgende *wesentliche Aspekte mathematischen Tuns* auf: Vermuten, Formalisieren, Beweisen, Widerlegen, Argumentieren, Verallgemeinern, Veranschaulichen, Systematisieren, Axiomatisieren und Theoriebilden (vgl. [Hischer & Lambert 2003] und [Lambert & Herget 2004]).

**Vagheit**: Der Begriff eines *numerischen Mittelwerts* und auch der der *Mitte* ist äußerst vielfältig und keinesfalls eindeutig (vgl. auch die Betrachtungen im vorigen Abschnitt!).

So kann bereits das Chuquet-Mittel zwischen zwei Brüchen als vieldeutiger „Mittelwert“ interpretiert werden, und jeder numerische „Mittelwert“ kann als Chuquet-Mittel aufgefasst werden, so dass sich beliebig viele numerische „Mittelwerte“ (als zweistellige Funktionen) erklären lassen, die sinnvollen axiomatischen Ansprüchen an Mittelwertbildung genügen. [10] Darüber hinaus gibt es auch *nicht-numerische Mittel*, etwa in der Geometrie und bei qualitativen Merkmalen in der Stochastik, und vor allem gibt es jenseits der Mathematik eine große Vielfalt von *Mitten.* Auch [Schweiger 1992, 207] hebt diesen *Aspekt der Vagheit* in seiner Analyse mit Recht besonders hervor: [11]

> [...] Dies dürfte mit der, fundamentalen Ideen zugeschriebenen <u>Vagheit</u> zusammenhängen. Es sei nochmals Jung 1978 zitiert: „Die <u>Idee einer Sache ist etwas vage</u>, braucht keine Detaillierung, macht sie erst sinnvoll.“ [...] das Bestehen einer <u>Unschärferelation</u> <u>„Je präziser, desto bedeutungsloser</u>“ [...] scheint auch hier zuzutreffen.

Gegenüber den deskriptiven Kriterien bringen normative Kriterien *Erwartungen an den Unterrichtsprozess* zum Ausdruck. Für die Mittelwertbildung würde dies bedeuten:

**Durchgängigkeit**: Die Mittelwertbildung gilt als eine *tragfähige Idee*, um curriculare Entwürfe des Mathematikunterrichts *durchgängig* gliedern zu helfen – von der Primarstufe bis hin zum Abitur und darüber hinaus.

In Verbindung mit dem deskriptiven Kriterium der Historizität führt dies zur *Einbeziehung kulturhistorischer Aspekte der Genese von Begriffen, Problemen und Ideen* in den Unterricht, [12] was eine „historische Verankerung“ ermöglichen soll: [13]

> [Es geht dann um] die Verwendung historischer Beispiele im Unterricht, die sich als tragfähige Bausteine einer Unterrichtseinheit erweisen. Dabei sollten sie gemäß Toeplitz vom „Staub der Zeit“ befreit und in heutiger Formulierung dargestellt werden. *„Geschichte der Mathematik“* erscheint in diesem Sinne als *didaktischer Aspekt* – zugleich wird ein *Beitrag zur Kulturgeschichte* geliefert.

**Transparenz**: Die Mittelwertbildung als Idee soll bei der Planung, Durchführung und Auswertung von *Mathematikunterricht* helfen, diesen *für alle Beteiligten inhaltlich* zu strukturieren und *transparent* zu machen.

Dieses Transparenz-Kriterium bedeutet, dass die – gemäß den deskriptiven Kriterien bereits lokalisierten – *fundamentalen Ideen im Unterricht auch explizit bewusst gemacht* werden müssen, um damit – auch für die Schülerinnen und Schüler! – im Unterricht *als „roter Faden" im Sinne des Kriteriums der Durchgängigkeit* zu erscheinen.

Während die vier deskriptiven Kriterien dazu dienen können, durch theoretische Analyse und rationalen Diskurs einen Katalog fundamentaler Ideen zusammenzustellen, müssen die beiden normativen Kriterien durch empirische Evaluation bezüglich derart gefundener fundamentaler Ideen überprüft werden, zumindest ist aber eine gemeinsame Sammlung subjektiver Unterrichtserfahrungen erforderlich.

Insbesondere erinnert das deskriptive Kriterium der *Historizität* daran, dass es sowohl notwendig als auch nützlich ist, kulturhistorische Aspekte der Genese von Begriffen, Problemen und Ideen in den Unterricht einfließen zu lassen, diesen damit im Sinne des normativen Kriteriums der *Durchgängigkeit* vertikal zu strukturieren, um also eine „historische Verankerung" zu organisieren, die zugleich eine „Verankerung" von Begriffen im Sinne von Ausubel sein kann. In diesem Sinn sind beide Kriterien untrennbar, weil sie den (in [Hischer & Lambert 2002] diskutierten) wichtigen *Zusammenhang zwischen kulturhistorischer Begriffsbildung und ontogenetischer Begriffsbildung* betonen.

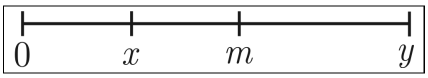
# 5 Historizität der Mittelwertbildung in der Mathematik

Nach dem erweiternden Exkurs über die Mittelwerte hinaus zu den Mitten – auch jenseits der Mathematik – kommen wir nun wieder auf die *Mittelwerte und Mitten in der Mathematik* zurück, um zu skizzieren, dass das Bilden von Mittelwerten und Mitten die Mathematik von ihren dokumentierten Anfängen bis heute wie ein roter Faden durchzieht.

Die **Babylonier** haben bereits vor rund 4000 Jahren die *musikalische Proportion* und die damit zusammenhängenden *drei klassischen Mittelwerte* (nämlich: *arithmetisches, geometrisches und harmonisches Mittel*) gekannt, bevor Pythagoras von Samos (ca. 569 – ca. 475) auf seinen Reisen nach Mesopotamien (bzw. Babylonien, etwa dem Gebiet des heutigen Irak) von diesen Kenntnis erlangt hat. Sowohl die (durch Keilschrifttafeln belegten) archäologischen Befunde als auch ihre mathematikhistorischen Deutungen zeigen uns, dass die Babylonier in der Lage gewesen sein konnten, mit Hilfe dieser Proportionen ihre *Quadratwurzelapproximationen* durchzuführen (vgl. [Hischer 2002], [Hischer 2004]).

Die **„älteren Pythagoreer"** (ca. 500 v. Chr.) entwickelten die *erste Theorie der Mittelwerte* („Mesotaeten"[14]). Um ihren Weg in heutiger Notation nachvollziehen zu können, geben wir zwei positive reelle Zahlen $x$ und $y$ mit $x < y$ vor mit dem Ziel, eine zwischen diesen beiden Zahlen liegende dritte positive reelle Zahl $m$ als deren „Mittelwert" zu beschreiben (vgl. Abb. 5). Die Pythagoreer betrachteten dann folgende Proportionen:[15]

**Abb. 5**




$$\frac{m-x}{y-m} = \frac{x}{x}, \quad \frac{m-x}{y-m} = \frac{x}{m}, \quad \frac{m-x}{y-m} = \frac{x}{y}$$

(Auf den rechten Seiten ist der „Zähler" konstant, und der „Nenner" wächst von links nach rechts.) Bezeichnen wir die Lösungen $m$ der drei Gleichungen der Reihe nach mit $A(x,y)$, $G(x,y)$ und $H(x,y)$, so errechnen *wir* heute:

$$A(x,y) = \frac{x+y}{2}, \; G(x,y) = \sqrt{xy}, \; H(x,y) = \frac{2xy}{x+y}$$

Wir erkennen hier *arithmetisches*, *geometrisches* und *harmonisches* Mittel. Es folgt:

$$A(x,y) \cdot H(x,y) = xy = \big(G(x,y)\big)^2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{x}{A(x,y)} = \frac{H(x,y)}{y}$$

Rechts steht die sog. „musikalische Proportion", mit der Oktave, Quinte und Quarte in Beziehung gesetzt wurden (vgl. [Hischer-Buhrmester 2004, 14 f] und [Lambert & Peters 2004, 35]. Die Pythagoreer haben dann die drei o. g. Gleichungen wie folgt variiert:

$$\frac{m-x}{y-m} = \frac{y}{x}, \ \frac{m-x}{y-m} = \frac{m}{x}, \ \frac{m-x}{y-m} = \frac{y}{m}, \ \frac{y-x}{m-x} = \frac{y}{x}, \ \frac{y-x}{y-m} = \frac{y}{x}, \ \frac{y-x}{m-x} = \frac{m}{x}, \ \frac{y-x}{y-m} = \frac{m}{x}$$

Die ersten drei hier aufgeführten Gleichungen unterscheiden sich nur in den rechten Seiten von den vorseitig genannten: Sie sind alle vom Typ $(m-x)/(y-m) = s$ mit einem von $x$ und $y$ abhängigen Quotienten $s$ (da ja auch der Mittelwert $m$ selber von $x$ und $y$ abhängt), und mehr Möglichkeiten gibt es auch nicht, diese Gleichungen bei Erhalt der linken Seite zu variieren. Sucht man nach weiteren Möglichkeiten der Variation in der Weise, dass links das Verhältnis von Längendifferenzen und rechts das Verhältnis von Längen steht, so kommt man nach Berücksichtigung äquivalenter bzw. unsinniger Darstellungen auf die restlichen vier Gleichungen – zumindest haben die Pythagoreer diese zehn Proportionen angegeben. Eine genauere Untersuchung zeigt allerdings, dass sie eine elfte übersehen haben (vgl. [Hischer 1998]): $(y-x)/(y-m) = y/m$

Und so ergeben sich als Lösungen der pythagoreischen Proportionen insgesamt *elf verschiedene Mittelwerte* bzw. Mittelwertfunktionen. Die Auffindung der jeweils zugehörigen Funktionsterme sei als nützliche Termumformungsübung anheim gestellt! [16]

Die **jüngeren Pythagoreer** (ca. 300 v. Chr.) betrachteten *arithmetische und geometrische Folgen* (aus unserer Sicht: „Mittelwertfolgen") und *„Mitten" in der Geometrie* (Mittelpunkt, Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende, Seitenhalbierende, ...).

Der französische Arzt **Nicolas Chuquet** (1445 – 1488), auch „Algorithmiker" genannt, veröffentlichte 1484, am Ende des ausgehenden Mittelalters und **zu Beginn der Neuzeit**, sein bereits erwähntes Buch „Triparty en la science des nombres". Er benutzt hier seine merkwürdigen Mittelwerte von Brüchen für einen Algorithmus zur Approximation von Nullstellen: Es sei etwa eine Lösung von $x^2 + x = 39\,{}^{13}\!/_{81}$ gesucht (vgl. [Cantor 1892, 31]). Dazu sucht man zunächst zwei ganzzahlige Werte, die die gesuchte Lösung einschachteln, stellt diese als Brüche mit dem Nenner 1 dar, bildet davon das Chuquet-Mittel, mit diesem dann ein neues einschachtelndes Intervall, und so geht es weiter: Es entsteht eine *Mittelwertfolge*, bei der jedes Folgenglied (vom dritten an) das Chuquet-Mittel von zwei vorausgehenden, die Nullstelle einschachtelnden Gliedern ist.

**James Gregory** (1638 bis 1675) veröffentlichte 1667 in seinem Buch „Vera circuli et hyperbolae quadratura" über Quadraturverfahren einen Algorithmus zur Berechnung von π, bei dem der Kreis *als harmonisch-geometrisches Mittel* der einschachtelnden Polygonfolgen erscheint (vgl. [Hischer 2004, 49 f]) – auch eine *Mittelwertfolge*.

**Carl Friedrich Gauß** (1777 – 1855) entdeckte 1791 das *AGM* (*arithmetisch-geometrisches Mittel*), [17] das heute Grundlage für einen besonders schnellen Algorithmus zur Approximation von π ist – eine weitere sehr wichtige und berühmte *Mittelwertfolge*.

**John Farey** (1766 – 1826) beschrieb 1816 die nach ihm benannten *Farey-Folgen* (es sind *endliche Mittelwertfolgen*!): Hierbei spielt das Chuquetmittel eine große Rolle, das in der Zahlentheorie auch als *Mediante* bekannt ist. Farey-Folgen und ihre Visualisierung durch *Ford-Kreise* werden in [Hischer 2004, 42 ff] in diesem Heft angesprochen.

**Heutzutage** liegt in der Mathematik und ihren Anwendungen (vgl. [Henze & Stummer 2004], [Lambert & Peters 2004]) eine kaum überschaubare Vielfalt unterschiedlicher Mittelwerte vor, die hier nicht dargestellt werden kann (vgl. [Bullen 2003]). Eine kleine, für den Mathematikunterricht interessante Auswahl bieten [Lambert & Herget 2004]. [Hischer & Lambert 2003] stellen eine „kleine Mittelwerttheorie" vor, in der gezeigt wird, dass das *Chuquetmittel* geeignet ist, um beliebige numerische Mittelwerte darzustellen. Da sich mit Hilfe des Chuquetmittels die pythagoreische Mittelwerttheorie verstehen lässt, seien die Eckdaten dieser Überlegungen hier zum Schluss kurz skizziert:

Um das (vieldeutige!) Chuquetmittel von zwei positiven reellen Zahlen $x$ und $y$ zu bilden, nehme man zunächst eine triviale Bruchdarstellung, etwa $x/1$ und $y/1$, woraus sich das arithmetische Mittel von $x$ und $y$ ergibt, das sich in Analogie zu Abb. 4 wie in Abb. 6 (für $s=1$) veranschaulichen lässt, wobei $x$ und $y$ die Steigungen zweier rechtwinkliger Dreiecke sind und das *Chuquetmittel als mittlere Steigung* erscheint. Wenn nun das zweite Steigungsdreieck mit einem positiven *Streckfaktor* $s$ zentrisch verzerrt wird, so kann die „mittlere Steigung" $m$ offenbar *jeden Wert* zwischen $x$ und $y$ annehmen, wobei $s$ zwischen 0 und $\infty$ variiert, d. h., jeder „Mittelwert" $m$ zwischen $x$ und $y$ lässt sich mit einem geeigneten „Streckfaktor" $s$ wie folgt darstellen:

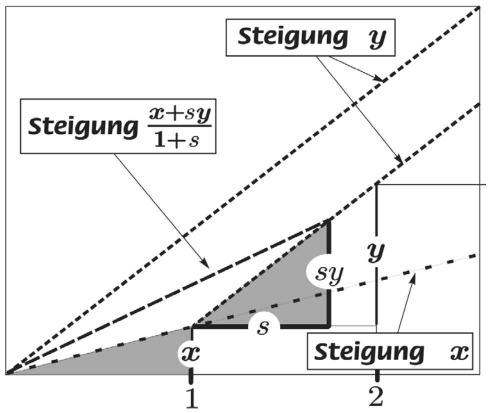



**Abb. 6**

$$m = \frac{x+sy}{1+s} \quad \text{bzw. äquivalent} \quad s = \frac{m-x}{y-m}.$$

Die rechte Seite der rechten Gleichung tritt in den ersten sechs pythagoreischen Mittelwertproportionen auf, und so kommen wir nun über Chuquet zurück zu den älteren Pythagoreern! Diese historischen Betrachtungen führen also nicht nur zu der Vermutung, dass sich das *Chuquetmittel* zur Darstellung beliebiger numerischer Mittelwerte eignet, um eine *Theorie numerischer Mittelwerte* zu entwickeln, sondern wir sehen zugleich, dass der Grundstein hierzu bereits vor rund 2500 Jahren bei den Pythagoreern gelegt worden ist, die dabei wiederum „nur" variierend und verallgemeinernd auf die rund 4000 Jahre alten drei „klassischen" babylonischen Mittelwerte zurückgegriffen haben.

# Literatur


Boyer, Carl B. [1968]: A History of Mathematics. New York: John Wiley & Sons.

Bullen, P. S. [2003]: Handbook of Means and their Inequalities. Dordrecht: Kluwer Acad. Press.

Cantor, Moritz [1892]: Geschichte der Mathematik. Zweiter Band. Leibzig: Teubner. 1. Auflage.

Henze, Norbert & Stummer, Wolfgang [2004]: Mittelwerte und Mitten in der Stochastik. In diesem Heft, 18–29.

Heymann, Hans Werner [1996]: Allgemeinbildung und Mathematik. Studien zur Schulpädagogik, Band 13, Reihe Pädagogik. Weinheim / Basel: Beltz.

Hischer, Horst [1998]: „Fundamentale Ideen" und „Historische Verankerung" — dargestellt am Beispiel der Mittelwertbildung. In: *mathematica didactica* **12**(1998)1, 3–21.

Hischer, Horst [2000]: Klassische Probleme der Antike — Beispiele zur „Historischen Verankerung". In: Blankenagel, J. & Spiegel, W. (Hrsg.): Mathematikdidaktik aus Begeisterung f. d. Mathematik — Festschrift für Harald Scheid. Stuttgart/Düsseldorf/Leipzig: Klett, 2000, 97–118.

Hischer, Horst [2002]: Viertausend Jahre Mittelwertbildung — Eine fundamentale Idee der Mathematik und didaktische Implikationen. In: *mathematica didactica* **25**(2002)2, 3–51.
Hischer, Horst [2003]: Mittelwertbildung — eine der ältesten mathematischen Ideen. In: *mathematik lehren*, 2003, Heft 119, 40–46.
Hischer, Horst [2004]: Mittelwertfolgen — oder: Mitten inmitten von Mitten. In diesem Heft, 42–54.
Hischer, Horst & Lambert, Anselm [2002]: Begriffsbildung und Computeralgebra. In: Hischer, Horst: Mathematikunterricht und Neue Medien — Hintergründe und Begründungen in fachdidaktischer und fachübergreifender Sicht. Hildesheim: Franzbecker, 2002, 138–166.
Hischer, Horst & Lambert, Anselm [2003]: Was ist ein numerischer Mittelwert? — Zur axiomatischen Präzisierung einer fundamentalen Idee. In: *mathematica didactica* **17**(2003)1, 3–42.
Hischer-Buhrmester, Monika [2004]: Mittelwerte und Mitten in der Musik. In diesem Heft, 14–17.
Hofstadter, Douglas R. [1988]: Metamagicum — Fragen nach der Essenz von Geist und Struktur. Stuttgart: Klett-Cotta.
Jahnke, Thomas [1993]: Das Simpsonsche Paradoxon verstehen — ein Beitrag des Mathematikunterrichts zur Allgemeinbildung. In: *Journal für Mathematikdidaktik* **14**(1993)3/4, 221–242.
Klika, Manfred (Hrsg.) [2003]: Zentrale Ideen. Themenheft Nr. 119 in *mathematik lehren*, 2003.
Lambert, Anselm & Peters, Uwe [2004]: Mittelwerte und Mitten in Geometrie und Physik. In diesem Heft, 30–41.
Lambert, Anselm & Herget, Wilfried [2004]: Mächtig viel Mittelmaß in Mittelwert-Familien. In diesem Heft, 55–66.
Meyer, Jörg [1994]: Über einige Paradoxa aus der Stochastik. In: Müller, K. P. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 1994. Hildesheim: Franzbecker, 239–242.
Nelson, Roger B. [1993]: Proofs Without Words. Washington: The Math. Association of America.
Schweiger, Fritz [1992]: Fundamentale Ideen — Eine geisteswissenschaftliche Studie zur Mathematikdidaktik. In: *Journal für Mathematikdidaktik* **13**(1992)2/3, 199–214.

# Anmerkungen

1 Für die neuere Literatur sei z. B. auf [Heymann 1996] und [Klika 2003] verwiesen.
2 Was Hans Schupp immer wieder betont.
3 Die „Bildungsstandards im Fach Mathematik ...“ (KMK, 2003) nennen „Mathematische Leitideen“, hier zwar z. B. „Zahl“ statt „Zählen“ – aber erfreulicherweise „Messen“ statt „Maß“!
4 Beide Ebenen werden hier sprachlich einheitlich als (Unterrichts-)Handlungen beschrieben.
5 [Jahnke 1993]; ferner z. B. http://de.wikipedia.org/wiki/Simpson-Paradoxon (15. 04. 2004).
6 Aus [Hischer 1998, 7]; auch bei [Jahnke 1993] und [Nelson 1993]; ein weiterer schöner „wortloser Beweis“ der Chuquetmittel-Ungleichung findet sich bei [Nelson 1993, 61].
7 Vgl. [Hischer 2004, 42 ff] bezüglich der *Mediante* zweier Brüche in der Zahlentheorie, die deren Chuquetmittel ist und die bei den sog. *Farey-Folgen* auftritt.
8 Vgl. Abschnitt 5 dieses Beitrags.
9 Dies wird in Abschnitt 5 skizziert und in weiteren Beiträgen dieses Heftes aufgegriffen.
10 Ausführlich in [Hischer & Lambert 2003].
11 Im Gegensatz dazu sollen die sog. „Bildungsstandards“ *präzise* sein: *„Bildungsstandards benennen präzise, verständlich ... die wesentlichen Ziele der pädagogischen Arbeit“* (BMBF: Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards, 2003, 20; vgl. http://mathematikunterricht.info).
12 Vgl. hierzu auch die Ausführungen über „Begriffsbildung“ in [Hischer & Lambert 2002].
13 Vgl. [Hischer 1998, 12], ähnlich auch in [Hischer 2000, 106 f].
14 Ausführlich dargestellt in [Hischer 2002, 17 ff].
15 Proportionen wurden verbal beschrieben; Brüche in unserem heutigen Sinn kannten sie nicht, damit auch nicht „Zähler“ und „Nenner“.
16 Die Ergebnisse finden sich in [Hischer 2002, 28].
17 Gemäß [Bullen 2003, 417] wurde es schon vor Gauß von Lagrange definiert.