

Merkwürdige Brückengeländer

Moiré-Effekt, Strahlensatz und die Lösung eines Problems

LERNGRUPPE: 8.–13. Schuljahr

IDEE: Mit Strahlensatz und Moiré-Effekt kann der Abstand von einer Brücke bestimmt werden.

ARBEITSBLATT 1–3: Untersuchung des Brückenmoirés, S. 56–58

ZEITBEDARF: 2–3 Schulstunden

WEITERES MATERIAL: Folienmodell einer Brücke

Was haben ein Stück Seidenstoff, ein Brückengeländer und ein Stifthalter gemeinsam? Diese zunächst irritierende Frage beantworteten die Schülerinnen und Schüler¹ mit einem Blick auf die **Abb. 1**: In allen drei Bildern sehen wir eine Art „Gitterstruktur“, ein „Netz“, „verschiedene Muster“, die in den einzelnen Bildern durch „Überlagerung“ zu entstehen scheinen. Diese Strukturen nennt man Moiré-Muster², und um sie geht es in der hier vorgestellten Unterrichtseinheit.

Einstieg

Die Bilder in **Abb. 1** dienen als Einstieg in die Unterrichtsreihe. Das Moiré-Muster im Brückengeländer schau-

ten sich die Schülerinnen und Schüler genauer an. Dazu dienen die **Arbeitsblätter 1 bis 3**, die selbstständig in Gruppen bearbeitet wurden. Max Möchtegern behauptet dort großspurig, er könne auf einen Blick die Entfernung des Fotografen zur abgelichteten Brücke abschätzen, und zwar unter Ausnutzung des Moiré-Musters.

Ist das möglich? Zur genaueren Untersuchung dieser Frage ist es sinnvoll, zunächst ein Modell einer Brücke zu betrachten. Bei dem in **Kasten 1** (vgl. S. 56) vorgestellten Modell wird das Brückengeländer durch Overheadfolien, die mit Linienmustern bedruckt sind, simuliert. Werden die Folienstücke in einem bestimmten Abstand zueinander gehalten, fällt zum einen die perspektivische Verkürzung des hinteren Geländers gegenüber dem vorderen in den Blick. Ebenso lässt sich das auftretende Moiré-Muster in der Überlagerung der simulierten Brückengeländer (Strichmuster) sowie die Ab- und Zunahme der Anzahl der auftretenden „Verdichtungsstellen“ beobachten.

Beim Verdrehen der Folien entdeckt man außerdem noch andere Moiré-Muster, so dass sich mit dem Folienmodell weitere Forschungsfelder er-

geben. Im Verlauf des weiteren Unterrichts stand jeder Schülergruppe ein solches Modell zur Verfügung.

Aufgabensequenz im Unterricht

Wie sieht es nun mit Max Möchtegerns Behauptung aus, die Position des Fotografen bestimmen zu können? Die Arbeitsblätter 1 und 2 sind in mehrere Arbeitsschritte gegliedert. Bei diesem Aufbau wird zunächst das im Brückengeländer auftretende Moiré-Muster erforscht und dann die Ausgangsfrage beantwortet.

In **Arbeitsblatt 1** geht es zunächst darum, die gegebene Situation genau zu erfassen. Dazu soll erst einmal ein Schätzwert für die Entfernung zur Brücke angegeben werden. Dieser wird später, nach Ermittlung des Ergebnisses, Anlass zu einer Plausibilitätskontrolle geben. Die Aufforderung, das Moiré-Muster zu beschreiben, sichert, dass die Schülerinnen und Schüler das Moiré-Muster genau betrachten und gezielt wahrnehmen. Die Vorgabe des Stichworts „Verdichtungsstellen“ gibt dabei eine Hilfestellung bei der Beschreibung. Sie ist auch Anlass, die

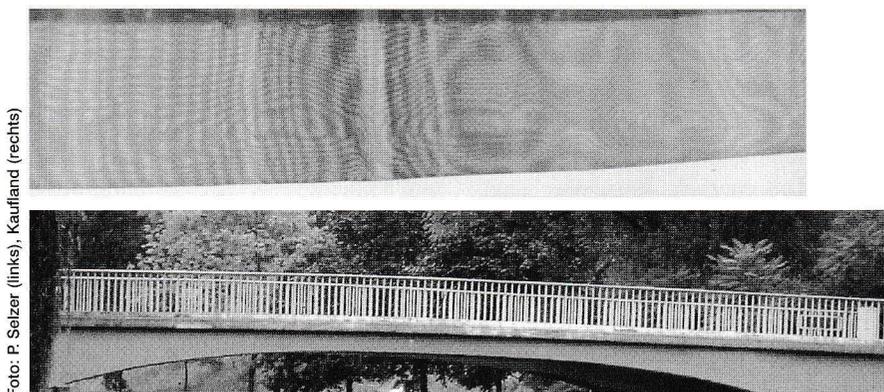


Foto: P. Selzer (links), Kaufland (rechts)

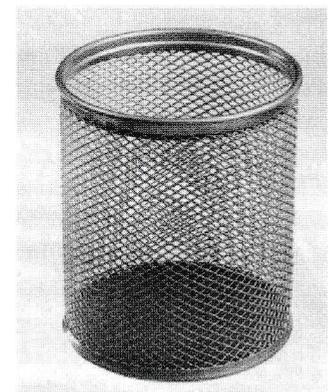


Abb. 1: Ein Seidenschal, ein Brückengeländer, ein Stifthalter: Was haben die Bilder gemeinsam?

beiden abgebildeten Moiré-Muster (im Brückengeländer sowie in der Definition) miteinander zu vergleichen.

In diesem Zusammenhang wird deutlich, dass die beiden Moiré-Muster sozusagen invers zueinander sind, da die Verdichtungsstellen des Moiré-Musters im Brückengeländer die hellen Bereiche ausmachen, während sie in der Überlagerung der Strichmuster die dunklen Bereiche bezeichnen.

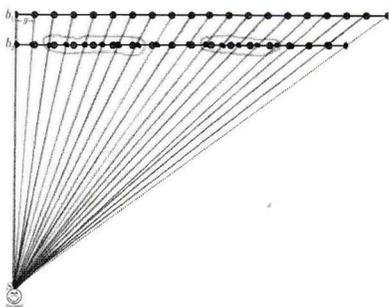
In der Aufgabe 3 sind Ausschnitte, die eine bestimmte Anzahl an Perioden des Moiré-Musters zeigen, in einer Tabelle aufgeführt. Der Zusammenhang wird in der Regel von den Schülerinnen und Schülern auf Anhieb erkannt:³

Die Anzahl der hinteren Gitterstäbe „minus“ die Anzahl der vorderen Gitterstäbe ergibt die Anzahl der Verdichtungsstellen. Mit jeder weiteren Verdichtungsstelle erhöht sich die Anzahl der vorderen Gitterstäbe um 8 und die Anzahl der hinteren Gitterstäbe um 9.

Die einzige Schwierigkeit dieses Aufgabenteils macht das Zählen der Gitterstäbe aus, da es ein wenig Geduld und genaues Hinsehen erfordert.

Arbeitsblatt 2 fokussiert den Zusammenhang zwischen dem Auftreten des Moiré-Musters mit dem Standpunkt des Fotografen.

Auch dieser Schritt kann von den Schülerinnen und Schülern selbstständig gelöst werden; gegebenenfalls muss ab und an erneut auf das Lesen des Arbeitsauftrags verwiesen werden:³



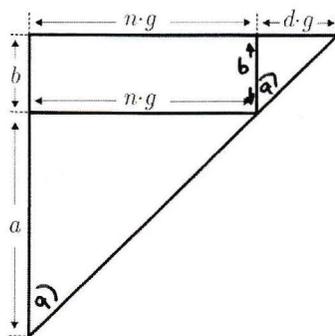
Das Moiré-Muster tritt in dem Foto der Brücke auf, weil aus der Sicht des Fotografen manche Stäbe sich deckungsgleich überschneiden, manche sich nur halb und manche nebeneinander stehen.

So entstehen die Verdichtungsstellen.

Die konkrete Berechnung der Entfernung des Fotografen zur Brücke er-

folgt in **Arbeitsblatt 3**. An dieser Stelle wird eine Skizze der Brückensituation vorgegeben, die in Beziehung zur Zeichnung in Arbeitsblatt 2 gesetzt wird: Es sind die Anzahlen der „gemeinsamen“ sowie der „freien“ Gitterstäbe anzugeben. Ein besonderes Augenmerk muss hierbei darauf gelegt werden, dass in der Zeichnung in Arbeitsblatt 3 nicht nur ganze, sondern auch halbe Gitterstäbe zu sehen sind.

Um die gesuchte Proportion zu finden, zogen die Schülerinnen und Schüler die Ähnlichkeit von Dreiecken bzw. die Trigonometrie heran:³



Wir berechnen das Verhältnis zwischen den Gegen- und Ankatheten der beiden Dreiecke (= Tangens):

$$\tan \alpha = \frac{n \cdot g}{a} = \frac{d \cdot g}{b}$$

Dies können wir machen, da die Dreiecke ähnlich sind (gleiche Winkel).

Oder sie nutzten die Strahlensätze:³

$$\frac{a+b}{n \cdot g + d \cdot g} = \frac{a}{n \cdot g}$$

Die Berechnung der Entfernung a für die in der Tabelle aus Arbeitsblatt 1 ermittelten Werte verdeutlicht, dass sich für alle Werte ungefähr dieselbe Entfernung ergibt. (Für $b = 2,50$ m ermittelte die Klasse entsprechend den Zeilen der Tabelle den Abstand des Fotografen jeweils zu $a_1 = 22,5$ m, $a_2 = 21,25$ m, $a_3 = 20,8$ m, $a_4 = 20,6$ m, $a_5 = 20,5$ m und $a_6 = 20,4$ m.) Somit reicht es zur Abschätzung der Entfernung aus, lediglich eine Periode des Moiré-Musters zu betrachten.

Kann Max Möchtegern also wirklich zu jeder Brücke, in deren Geländer ein Moiré-Muster zu beobachten ist, die Entfernung abschätzen? Die Ergebnisse zeigen, dass dazu lediglich die Anzahl der Gitterstäbe des vorderen Brückengeländers, die in einer Pe-

riode des Moiré-Musters vorkommen, ermittelt werden muss, denn diese Zahl macht den Proportionalitätsfaktor der Entfernung a zur Breite b der Brücke aus.

Weitere Anregungen

Nun können mehrere Aspekte der gegebenen Situation diskutiert werden, beispielsweise:

1. Wie verändert sich die Anzahl der Verdichtungsstellen, wenn der Fotograf näher an die Brücke herangeht?
2. Wie verändert sich die Anzahl der Verdichtungsstellen, wenn man eine größere Breite der Brücke annimmt?

Zur nachhaltigen Festigung haben die Schülerinnen und Schüler als Hausaufgabe einen kurzen Aufsatz geschrieben: „Was habe ich an dieser Aufgabe gelernt?“

Anmerkungen

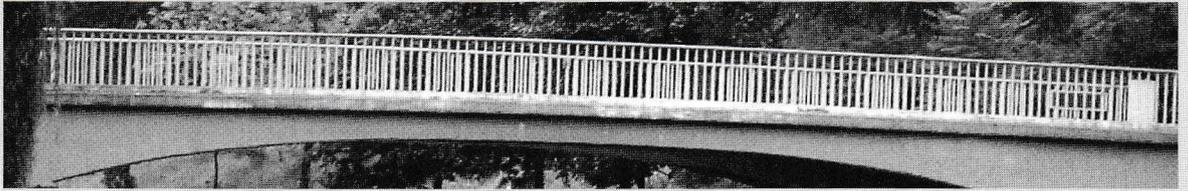
- 1 Die Unterrichtseinheit wurde im Schuljahr 2006/2007 mit der Klasse 10.3 des Gymnasiums am Krebsberg in Neunkirchen und mit der Klasse 10a der Erweiterten Realschule am Schmelzerwald in St. Ingbert durchgeführt. Ein besonderer Dank geht an die Schülerinnen und Schüler dieser Klassen, an StD Dieter Eichhorn und Dr. Anselm Lambert, die an der Durchführung der Einheit maßgeblich beteiligt waren.
- 2 Bei einem Moiré-Muster handelt es sich um ein objektives physikalisches Phänomen, das mathematisch beschreibbar ist (vgl. Amidror 2000). Es ist keine optische Täuschung, d. h. keine subjektive, physiologisch oder psychologisch bedingte Fehlwahrnehmung (Hischer 2002, S. 298).
- 3 Transkript einer Schülerantwort.

Literatur

- Amidror, Isaac: Computational Imaging and Vision. Bd. 15: The theory of the Moiré phenomenon. Kluwer, Dordrecht 2000.
- Hischer, Horst: Mathematikunterricht und Neue Medien. Franzbecker, Hildesheim 2002.
- Hischer, Horst: Funktionen und Medien – Anmerkungen zur Trias ihrer Beziehungen. – In: Malitte u. a. (Hrsg.): Die etwas andere Aufgabe. Festschrift für Wilfried Herget. Franzbecker, Hildesheim 2006, S. 25–42.
- Selzer, Pia: Dem Aliasing auf der Spur – Wie wir Neue Medien als Funktionen entdecken können. – In: Malitte u. a.: Die etwas andere Aufgabe. Festschrift für W. Herget. Hildesheim 2006, S. 139–162.
- Selzer, Pia: Überraschende Phänomene bei der Darstellung von Funktionen – in naiver und mathematischer Sicht. Universität des Saarlandes. Staatsexamensarbeit, 2005.

Merkwürdige Brückengeländer

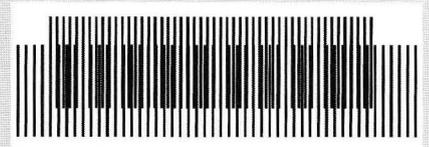
Aus dem Wollmaushausener Tageblatt



Max Möchtegern hat den schärfsten Blick weit und breit: „Ich kann auf einen Blick sagen, von welcher Entfernung aus der Fotograf die Brücke hier oben fotografiert hat!“ Er verrät uns auch seinen Trick dabei: „Na ja, ich seh’ mir eben einfach das Moiré-Muster im Brückengeländer an!“
Kann das stimmen, was Max Möchtegern hier behauptet?

Moiré-Muster

Ein Moiré-Muster ist ein sichtbares Phänomen, das beispielsweise dann auftritt, wenn sich periodische Muster überlagern. Es besteht aus einem neuen Muster, das deutlich in der Überlagerung zu erkennen ist, obwohl es in keinem der Ausgangsmuster enthalten ist. So zeigt die Überlagerung zweier Linienmuster ganz deutlich ein Moiré-Muster.



→ AUFGABEN

- Schätze im obigen Foto die Entfernung des Fotografen zur Brücke, und notiere deinen Schätzwert.
- Diskutiert in eurer Gruppe, was Max Möchtegern im Foto als Moiré-Muster bezeichnet, und notiert eure Ergebnisse. – Vielleicht hilft euch bei der Beschreibung die Bezeichnung „Verdichtungsstelle“. Was könnte wohl damit gemeint sein?
- a Die folgende Tabelle zeigt einige Ausschnitte aus dem obigen Foto des Brückengeländers. Fülle die leeren Zellen aus.

Bildausschnitt	Anzahl der Gitterstäbe im vorderen Geländer	Anzahl der Gitterstäbe im hinteren Geländer	Anzahl der sichtbaren „Verdichtungsstellen“
			1

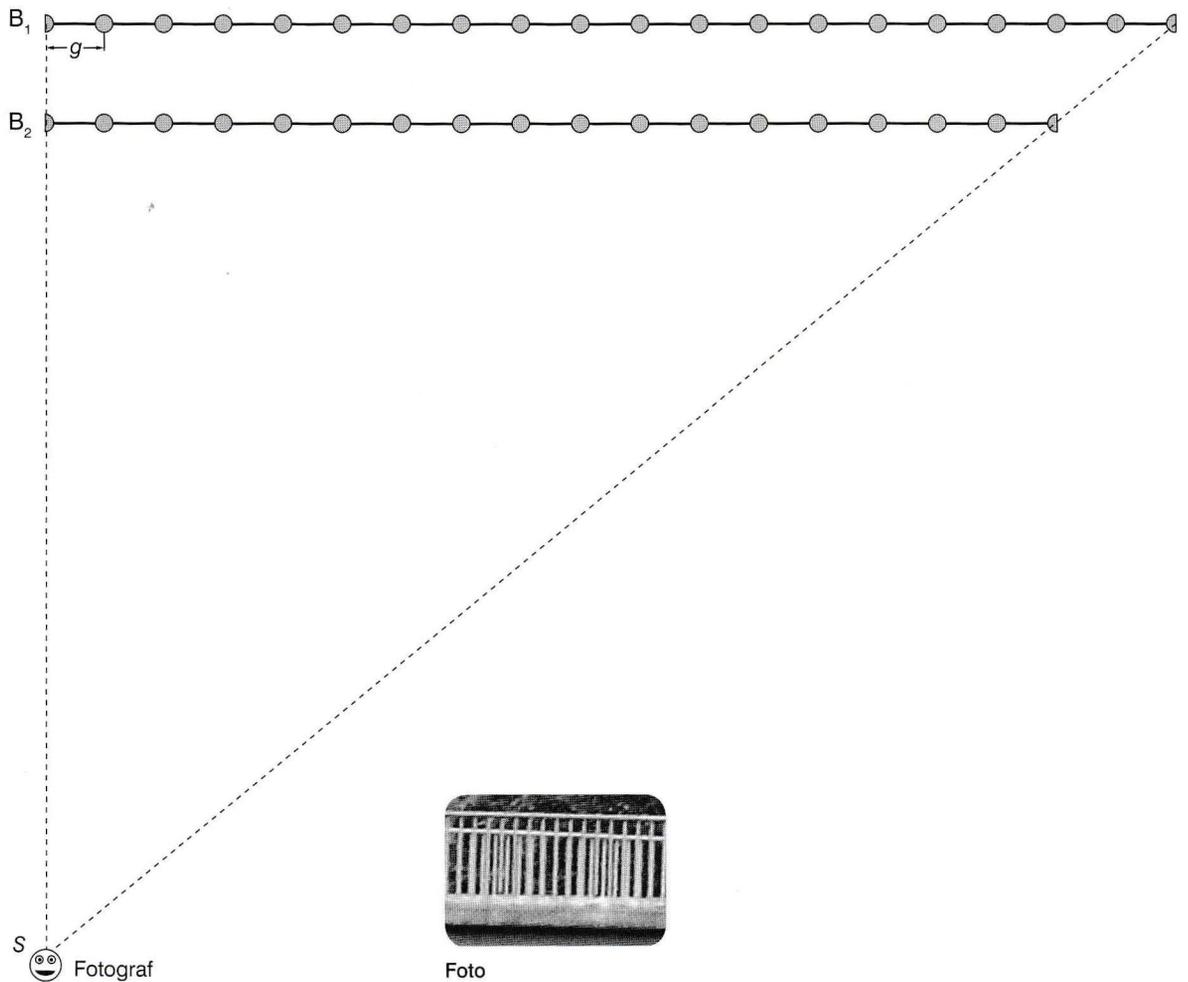
- b Welcher Zusammenhang besteht jeweils zwischen den Anzahlen der Gitterstäbe (vorne, hinten) und der Anzahl der Verdichtungsstellen?

Merkwürdige Brückengeländer

Die Zeichnung zeigt den im Foto abgebildeten Ausschnitt des Brückengeländers, und zwar „von oben gesehen“: Die beiden Geländerausschnitte B_1 bzw. B_2 mit den hellgrauen Punkten stellen das hintere bzw. das vordere Brückengeländer mit den zugehörigen Gitterstäben dar, g ist der Abstand benachbarter Gitterstäbe. Die gestrichelten Linien zeigen den Blickwinkel des Fotografen durch den Sucher seiner Kamera.

→ AUFGABEN

4. Verbinde mit einem Lineal alle Mittelpunkte der vom Fotografen aus gesehenen „hinteren“ Gitterstäbe jeweils mit dem Standpunkt S des Fotografen.
5. Markiere dann die Schnittpunkte dieser Verbindungsstrecken mit dem vorderen Brückengeländer B_2 durch einen ausgefüllten runden Punkt, der ungefähr so groß ist wie die bereits gegebenen Punkte!

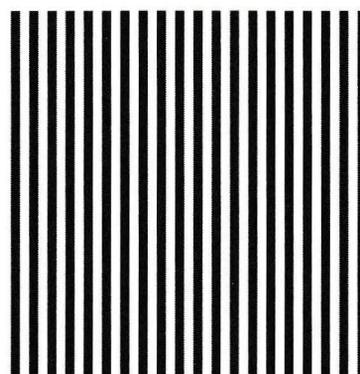


6. Markiere in der Zeichnung die beiden Verdichtungsstellen, die im Foto zu sehen sind.
7. Erläutere anhand der obigen Darstellungen die Gründe für das Auftreten des Moiré-Musters in der Fotografie des Brückengeländers.

Folienmodell eines Brückengeländers

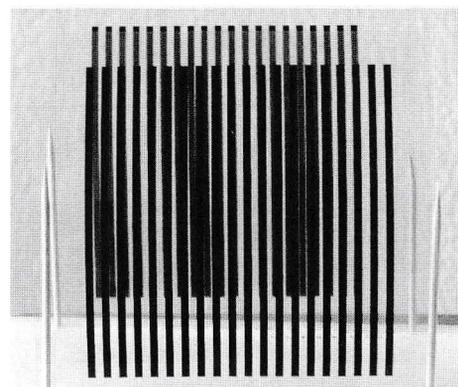
Vorlage

Linienmuster zum vergrößerten Ausdruck auf eine OHP-Folie



Versuchsanleitung

Das obige Linienmuster wird auf zwei OHP-Folien ausgedruckt, und beide Folien werden im Abstand von ca. 5–10 cm hintereinander gehalten.



3

Merkwürdige Brückengeländer

Die folgende Abbildung ist eine verallgemeinerte Darstellung der Zeichnung aus Arbeitsblatt 2.

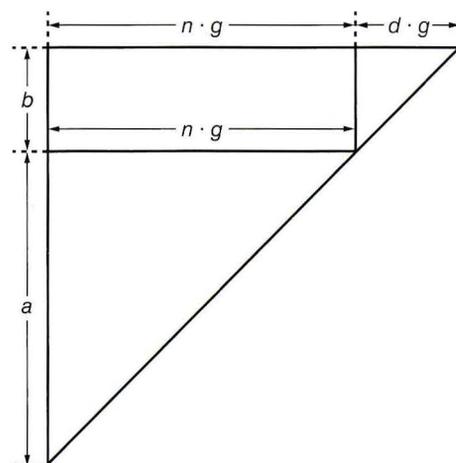
Dabei steht die Variable a für den gesuchten Abstand des Fotografen zur Brücke, b steht für die Breite der Brücke, n gibt die Anzahl der Gitterstäbe des vorderen Brückengeländers an, und $n + d$ bezeichnet die Anzahl der Gitterstäbe im hinteren Brückengeländer, d.h.: d ist die Differenz der Anzahlen der Gitterstäbe zwischen dem hinteren und dem vorderen Brückengeländer. g bezeichnet (wie in der Abbildung in Arbeitsblatt 2) den Abstand der Gitterstäbe.

→ AUFGABEN

8. Welche Werte haben n und d in der Zeichnung aus Arbeitsblatt 3?

$$n =$$

$$d =$$



9. Mit Hilfe der Abbildung auf diesem Arbeitsblatt ergibt sich eine sogenannte „Proportion“ (eine Verhältnisgleichung) für die Längen a und b : Ermittle diese Proportion.
10. Berechne nun die gesuchte Entfernung a , und zwar jeweils mit denjenigen Werten, die du in der Tabelle von Arbeitsblatt 2 ermittelt hast.
(Hinweis: Die Breite b der Brücke musst du dabei schätzen! Was stellst du fest? Warum ist das so?)