Horst Hischer

Zum Problem der Würfelverdoppelung in der Darstellung durch Johann Christoph Sturm 1670

1 Übersicht

Die Verdoppelung des Würfels gehört mit der Dreiteilung eines Winkels und der Quadratur des Kreises zu den drei klassischen Problemen der griechischen Antike.[1] Jeweils geht es darum, geometrisch eine „Lösung“ x zu finden, wie es nachfolgend veranschaulicht wird.

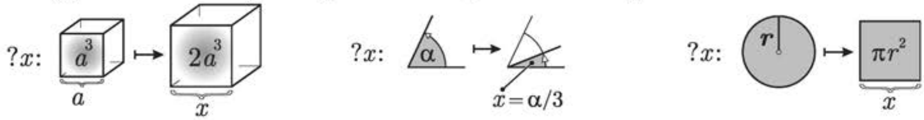


Abb. 1: Visualisierung der mit den drei klassischen Problemen der Antike verbundenen Aufgaben

Im ersten hier gezeigten Beispiel, der Würfelverdoppelung, ist ein Würfel der Kantenlänge a gegeben, der also das Volumen a^3 hat, und es ist dann die Kantenlänge x eines größeren Würfels mit dem doppelten Volumen gesucht, so dass also $x^3 = 2a^3$ gilt. Entsprechend sind die beiden anderen Fälle gemeint. Doch was soll daran problematisch sein? Im Fall der Würfelverdoppelung ist klar, dass $x = \sqrt[3]{2} \cdot a$ gilt. Ist die Kantenlänge a gegeben, so kann man zwar die gesuchte neue Kantenlänge x sofort numerisch angenähert *berechnen*, aber wie soll man x *geometrisch* und also *nicht rechnerisch* finden?

Bereits vor über 2400 Jahren tauchten diese drei geometrischen Probleme in der griechischen Antike auf, und es wurden dazu viele Lösungsvorschläge gemacht. Der Mathematiker und Physiker Archimedes (287 bis 212 v. Chr.) beschrieb sie in seinen Werken, die uns durch den Mathematiker und Philosophen Eutokios von Askalon (ca. 480 – ca. 540 n. Chr.) nebst einer umfangreichen Kommentierung überliefert sind.

1670 veröffentlichte Johann Christoph Sturm die erste deutschsprachige Übersetzung von Archimedes‘ Werken unter dem Titel *„Des unvergleichlichen Archimedis Kunst-Bücher“*. Sturm, geboren am 3. November 1635 in Hilpoltstein in Mittelfranken, war zunächst Pastor in Deiningen in der Grafschaft Oettingen und später Professor für Mathematik und Physik in Altdorf (in der „Academia Altorfina“), wo er am 26. Dezember 1703 starb.

Nachfolgend werden einige Lösungen des Problems der Würfelverdoppelung dargestellt, wie sie ins Sturms Werk zu finden sind.

Zuvor erfolgt eine heuristische Vorbetrachtung.

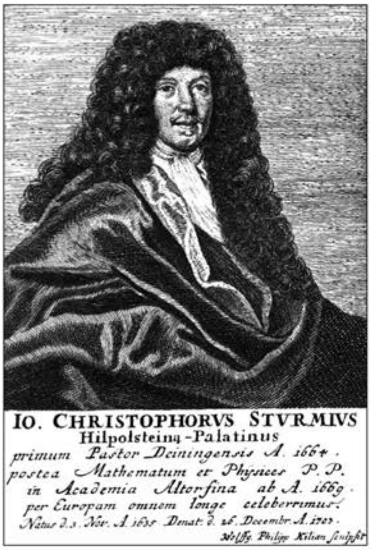


Abb. 2: Johann Christoph Sturm

Erschienen in: *Der Mathematikunterricht*, 62(2016)2, 41–52.

2 Vorbetrachtung: mittlere Proportionalen

Die Würfelverdoppelung scheint nur eine Verallgemeinerung des Problems der Quadratverdoppelung zu sein, für die es bekanntlich viele elementare geometrische Lösungen gibt, von denen eine exemplarisch in Abb. 3 zu sehen ist.

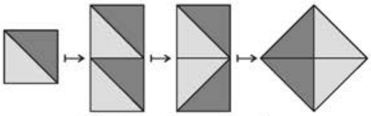


Abb. 3: Quadratverdoppelung

Würden wir dieses „Problem“ formal analog zu Abb. 1 beschreiben, so wäre $x^2 = 2a^2$ zu lösen. Hier können wir nun die rechte Seite als Produkt von zwei Längen deuten, nämlich als $a \cdot 2a$, und wenn wir auch die linke Seite als Produkt schreiben, so erhalten wir $x \cdot x = a \cdot 2a$, was wir in eine *Verhältnisgleichung* (eine *Proportion*) umwandeln können:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{2a} \tag{1}$$

Das Problem der Quadratverdoppelung kann also so umgedeutet werden, dass zu den beiden gegebenen Längen a und $2a$ eine dritte Länge x so zu finden ist, dass die Proportion (1) erfüllt ist. Wegen $x^2 = 2a^2$ ist $x \neq a$. Wäre $x < a$, so wäre $x^2 < a^2 < 2a^2$, also ist $x > a$. Entsprechend folgt $x < 2a$, und damit ist $a < x < 2a$. Da also x zwischen a und $2a$ liegt, ist x ein „Mittelwert“ zwischen a und $2a$ (nämlich das *geometrische Mittel*), das also durch die Proportion (1) definiert ist. Verallgemeinert lautet diese Proportion:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b} \tag{2}$$

Seit der griechischen Antike nennt man x hier die (!) „mittlere Proportionale“ von a und b. Damit besteht die Lösung des Problems der Quadratverdoppelung in der Ermittlung der mittleren Proportionalen zwischen der Länge der Quadratseite und deren doppelter Länge!

Vielleicht können wir diese Sichtweise auch auf das Problem der Würfelverdoppelung übertragen? Hier wäre dann $x^3 = 2a^3$ zu betrachten. Analog zu (1) erhalten wir zunächst:

$$\frac{a}{x} = \frac{x^2}{2a^2} \tag{3}$$

Das scheint noch nicht weiter zu führen. Schön wäre es, wenn auf der rechten Seite ein Ausdruck wie $\frac{y}{2a}$ mit einer neuen Länge y stünde. Das erzwingen wir versuchsweise:

$$\frac{a}{x} = \frac{x^2}{2a^2} = \frac{y}{2a} \tag{4}$$

Die aus dem mittleren und rechten Glied bestehende Gleichung lösen wir nach y auf und erhalten $y = x^2 : a$, was sich analog zu (1) als $y : x = x : a$ schreiben lässt bzw. invertiert:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} \tag{5}$$

Aus (4) und (5) ergibt sich nun erweiternd und zusammenfassend:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a} \tag{6}$$

Konsequenz: Um bei gegebener Kantenlänge a das Problem der Würfelverdoppelung zu lösen, sind also zu a und $2a$ „nur“ *zwei mittlere Proportionalen* zu bestimmen! [2] So liegt also ein Schlüssel zur Lösung des Problems der Würfelverdoppelung vor. (Und es ist klar, dass man (6) auf n mittlere Proportionalen zwischen a und b verallgemeinern kann!)

3 Der Hilfssatz des Hippokrates

Sturm stellt mit Bezug auf Eutokios' Werk über Archimedes die Bedeutung der beiden mittleren Proportionalen, die er „Gleichverhaltende" nennt, für dieses Problem heraus: [3]

> **Betrachtung der alten benahmten Aufgab /**
> **von Erfindung zweyer mittlern gleichverhaltenden.**
>
> Die Gelegenheit zu dieſer Aufgab erzehlet **Erathoſthenes** in einem Sendſchreiben an den Kônig **Ptolomæum** folgender Geſtalt: Man ſage / einer unter den Trauerſpielſchreibern fûhre unter andern ein den **Mino** / welcher dem **Glaukus** ein Grabmal aufrichten laſſen / und als er vernommen / daß jede Seite deſſelben (dann es war wûrfflicht geſtaltet) 100. Schuh lang war / hab er geſagt: **Fûr einen Kônig ſeys zu klein / die Grôſſe mûſſe doppelt ſeyn**. Als aber der Werkmeiſter nachmals jede Seite des Grabes verdoppelt (und vermeinet / auch dardurch des Grabes Grôſſe verdoppelt zu haben) ſey befunden worden / daß er geirret habe / weil nehmlich / wann man die Seiten verdoppelt / die Flâchen / welche von denen gedoppelten Seiten beschloſſen werden / nicht zwey- sondern vierfach / die Côrper aber achtfach oder achtmal ſo groß werden / [...] Nach dem aber alle Meßkûnstler ſich lange Zeit vergeblich bemûhet / habe endlich **Hippocrates von Chio** am erſten beobachtet / daß / wann man zwiſchen zweyen geraden Lineen / deren eine zweymal ſo groß iſt als die andere (**nehmlich zwiſchen der Seite des gegebenen Wûrfels und zwischen ihrer gedoppelten**) zwey mittlere unzertrennt - gleichverhaltende (continuè proportionales) fânde (**und / verstehe / auf die erſte der beyden gefundenen einen Wûrfel aufrichtete**) ſo dann der gegebene Wûrfel verdoppelt seyn wûrde [...]. Alſo daß **Hippocrates** die vorige zweiffelhafte Frag in eine andere nicht weniger zweiffelhafte und ſchwere verwandelt habe. Nach Verflieſſung einiger Zeit aber / wie man erzehle / haben die **Delier** / bey regierender Pest / ihren Abgott Apollo umb Hûlf angeflehet / von demſelben aber Befehl bekommen / daß ſie ihm einen Altar / welcher wûrflicht gebauet war / verdoppeln ſollten. Wordurch ſie dann in den obigen Zweiffel geſtûrzet / ihre Zuflucht zu denen / beym **Plato** in der **Academi** ſich aufhaltenden Meßkûnſtlern genommen / und umb Auflôſung dieses Zweiffels angeſuchet haben: Welche dann auch / ſonderlich auf **Platons** Zureden / sich eifrigst bemûhet zu erôrtern die Frage von zweyen mittlern gleichverhaltenden / welche daher / wegen erzehlter Gelegenheit ihres Ursprungs / den Nahmen der **Deliſchen Aufgab** bekommen hat.

Hippokrates von Chios (470 – 410 v. Chr. (nicht zu verwechseln mit dem durch seinen „Eid" bekannten Hippokrates von Kos) leistete also einen wesentlichen Beitrag zur Lösung des Problems der Würfelverdoppelung – dem **Delischen Problem** –, indem er es auf die Ermittlung von zwei *mittleren Proportionalen* zurückführte. Denn für beliebige Streckenlängen a, x, y folgt aus (6) stets die zu lösende Gleichung $x^3 = 2a^3$. Das führt zum

Hilfssatz des Hippokrates:

Das bei gegebener Streckenlänge a durch $x^3 = 2a^3$ beschreibbare Delische Problem ist gelöst, wenn es gelingt, neben x eine weitere Länge y so zu ermitteln, dass gilt:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

Wenngleich es ein genialer mathematischer „Schachzug" ist, die Lösung eines Problems auf ein anderes zurückzuführen, so war dieses Problem damit keineswegs gelöst, weil ja die ursprüngliche Frage zunächst nur *„in eine andere nicht weniger zweifelhafte und schwere verwandelt"* wurde (s. o). Gleichwohl beruhen seitdem die antiken Lösungsvorschläge auf diesem Hilfssatz des Hippokrates, also auf der Suche nach einem *Verfahren* zur Bestimmung der zwei mittleren Proportionalen zu zwei gegebenen Längen. Und damit war über diesen Umweg von Hippokrates der Weg zur Auffindung unterschiedlicher Lösungen geebnet.

Moritz Cantor schreibt dazu 1894 ganz ähnlich: [4]

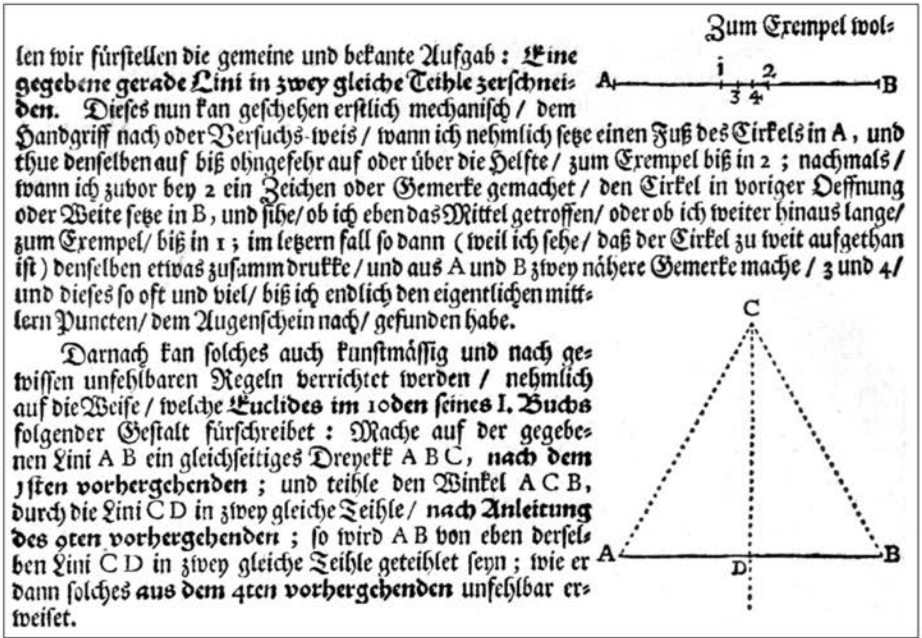
> Während nun lange Zeit hindurch Alle rathlos waren, entdeckte zuerst [...] Hippokrates, dass, wenn man herausbrächte zu zwei gegebenen graden Linien, wo die grössere der kleineren Doppelte wäre, zwei mittlere Proportionalen von stetigem Verhältnisse zu ziehen, der Würfel verdoppelt werden könnte […].

4 Sturm: „mechanische Lösungen" versus „kunstmäßige" Lösungen

Sturm unterscheidet zwei grundsätzlich verschiedene Kategorien geometrischer Lösungsverfahren, die er „mechanische Lösungen" bzw. „kunstmäßige Lösungen" nennt: [5]

> [...] müſſen wir [...] erinnern / daß eine jede ſolche Aufgab auf zweyerley Weise könne erörtert und aufgelöſet werden : einmal Mechaniſch (wie die Künſtler zu reden pflegen) das iſt / durch einen ſonderbaren Handgriff / durch oftmaliges Verſuchen / und ohne gewiſſe ohnfehlbare Regeln / jedoch alſo / daß kein merklicher Irrtuhm mit unterlauffe / sondern / aufs wenigſte dem Augenschein nach / die Sache getroffen ſey : Andersmals kunſtmäſſig und aus gewissen Regeln / welche entweder vor ſich ſelbst bekannt / oder vorher unfehlbar bewieſen sind.

Er erläutert das am Beispiel der Halbierung einer Strecke mittels Zirkel (Abb. 4):


Zum Exempel wollen wir fürſtellen die gemeine und bekante Aufgab : **Eine gegebene gerade Lini in zwey gleiche Teihle zerſchneiden.** Dieſes nun kan geſchehen erſtlich mechaniſch / dem Handgriff nach oder Verſuchs-weis / wann ich nehmlich ſetze einen Fuß des Cirkels in A, und thue denſelben auf biß ohngefehr auf oder über die Helfte / zum Exempel biß in 2 ; nachmals / wann ich zuvor bey 2 ein Zeichen oder Gemerke gemachet / den Cirkel in voriger Oeffnung oder Weite ſetze in B, und ſihe / ob ich eben das Mittel getroffen / oder ob ich weiter hinaus lange / zum Exempel / biß in 1 ; im letzern fall ſo dann (weil ich ſehe / daß der Cirkel zu weit aufgethan iſt) denſelben etwas zuſamm drukke / und aus A und B zwey nähere Gemerke mache / 3 und 4 / und dieſes ſo oft und viel / biß ich endlich den eigentlichen mittlern Puncten / dem Augenſchein nach / gefunden habe.

Darnach kan ſolches auch kunſtmäſſig und nach gewiſſen unfehlbaren Regeln verrichtet werden / nehmlich auf die Weiſe / welche **Euclides im 10den ſeines I. Buchs** folgender Geſtalt fürſchreibet : Mache auf der gegebenen Lini A B ein gleichſeitiges Dreyekk A B C, **nach dem 1ſten vorhergehenden** ; und teihle den Winkel A C B, durch die Lini C D in zwey gleiche Teihle / **nach Anleitung des 9ten vorhergehenden** ; ſo wird A B von eben derſelben Lini C D in zwey gleiche Teihle geteihlet ſeyn ; wie er dann ſolches **aus dem 4ten vorhergehenden** unfehlbar erweiſet.

Abb. 4: „mechanische" und „kunstmäßige" Halbierung einer Strecke (Ausschnitt aus [Sturm 1679, 103])

So findet man also mit wenigen Schritten iterativ „mechanisch" einen Streckenmittelpunkt in für praktische Zwecke ausreichender Genauigkeit, während es bei der „kunstmäßigen" Lösung nach Euklid gar nicht um die praktische Durchführung geht, sondern vor allem darum, wie der Mittelpunkt „regelrecht" und axiomatisch begründet *gedacht* werden kann.

> Bezeichnungen: $[AB]$: *Strecke* mit den Endpunkten A und B, $|AB|$: *Länge* von $[AB]$, $\langle AB\rangle$: *Verbindungsgerade* von A und B, $|AB\rangle$: *Strahl* durch B mit dem Anfangspunkt A.

5 Beispiele für „mechanische“ Lösungen des Delischen Problems

Sturm beschreibt vier mechanische Lösungen, von denen zwei berühmte dargestellt seien.

5.1 Lösungswerkzeug: Holzrahmen-Apparat (vermutlich von Eratosthenes)

Sturm beginnt seine Darstellung der Methoden zur Auffindung von zwei mittleren Proportionalen mit einer „Betriebsanleitung“ unter der Überschrift:

Etliche Mechaniſche Wege der Alten / zwiſchen zweyen gegebenen Linieen zwey mittlere gleichverhaltende zu finden. Der Erſte des Platonis.

Sturms historische Zuordnung dieses „Einschiebeapparats“ zu Platon ist zwar weit verbreitet, sie ist jedoch nach heutigem Kenntnisstand nicht korrekt, denn dieser „Apparat“ geht vermutlich auf Eratosthenes zurück. [6]

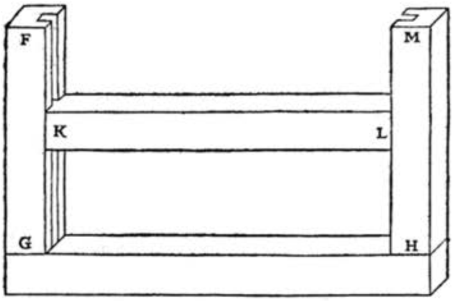


Abb. 5: Einschiebe-Apparat aus [Sturm 1670, 104]

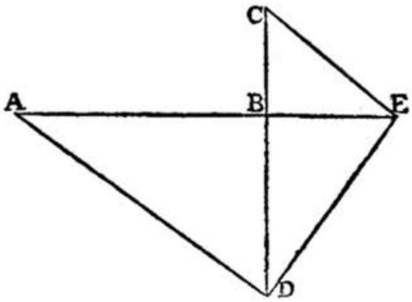


Abb. 6: Lösungsstruktur zu Abb. 5 aus [Sturm 1670, 105]

Die folgende „Betriebsanleitung“ bezieht sich auf obige Abbildungen. Sturm meint hier mit „Dieser“ zwar „Platon“, aber wir müssen hierfür korrigierend „Eratosthenes“ denken: [6]

> Dieser bedienet ſich eines gewiſſen Werkzeuges / deſſen Geſtalt aus beygefůgtem Abriß zu erſehen. GH ist ein dikkes wol geſchlichtetes Lineal / und an deſſen Enden zwey andere / in gleicher Dicke / winkelrecht eingezåpfet / innwendig mit Hohlkehlen / in welchen das vierdte KL mit GH gleichlauffend mŏge auf- und abgeſchoben werden. Wann nun gegeben ſind zwey gerade Lineen / AB und BC, und zwischen dieſen zwey mittlere gleichverhaltende ſollen gefunden werden / so verfahre also : Setze BC auf AB winkelrecht in B, und verlångere ſo wol AB als BC nach Belieben gegen E und D hinaus ; Lege ſo dann das Inſtrument auf dieſe Verzeichnung alſo / daß GH auf A lige und gegen D hinaus ſich erstrekke / biß (nach ŏfterem Hin- und Wiederrůcken) das Ekk H die Lini BD durchſchneide / HM aber wie DE lige / KL aber/ auf C gerukket / zugleich in dem Winkel L den / von HM abgeſchnittenen / Punct E berůhre / (welches / wie gemeldet / durch vieles Hin- und Wiederrukken endlich getroffen wird.) Wann ſolches geſchehen / ſo werden BD und BE die zwey begehrte mittlere gleichverhaltende ſeyn.
>
> **Beweiß.** Dann / weil auf dieſe Weise / wegen Beschaffenheit des rechtwinklichten Inſtrumentes / ADE und DEC gerade Winkel / und aus dieſen geraden Winkeln DB und CB auf AE und DC ſenkrecht gezogen ſind / […] So wird ſich […] AB gegen BD verhalten / wie BD gegen BE, und ferner / wie BD gegen BE, alſo BE gegen BC, das ist / BD und BE werden zwiſchen AB und BC zwey mittlere gleichverhaltende ſeyn.

Hier ist zu ergänzen, was *„verlängere ... nach Belieben“* bedeutet: Die Endpunkte E und D liegen zunächst noch nicht fest, sondern sie werden erst durch das „Rücken“ ermittelt.

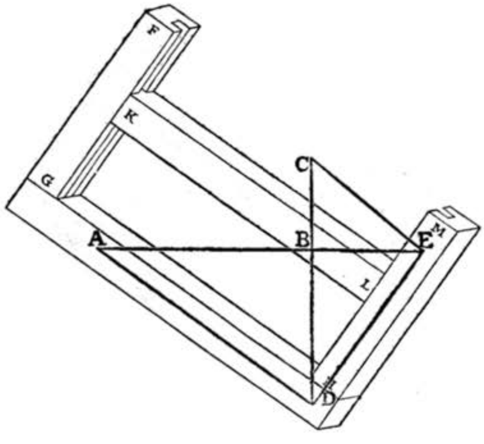


Abb. 7: „Rücken“ des Holzrahmens gemäß Sturms Anleitung

Es ist eine spannende Aufgabe, Sturms „Betriebsanleitung“ in Verbindung mit seinem Beweis so zu deuten und zu interpretieren, dass damit dann die Ermittlung der beiden gesuchten mittleren Proportionalen durch eine „Einschiebelösung“ mit dem Holzrahmen-Apparat gelingen kann. Abb. 7 symbolisiert das genannte „Rücken“ des Apparats: $[AB]$ und $[BC]$ sind die gegebenen Strecken, die in B rechtwinklig zusammenstoßen. Der Apparat wird (hier aus Darstellungsgründen „unten“ liegend) – wie bei Sturm beschrieben – so gedreht und mit Verschieben des Balkens $[KL]$ „gerückt“, bis $[GH]$ mit $[AD]$ zusammenfällt und $[KL]$ durch E verläuft. (Allerdings erweist sich Abb. 6 mit Abb. 7 nach Augenmaß als nicht korrekt, denn $[CE]$ soll nach Sturms Beschreibung $[KL]$ entsprechen und muss daher parallel zu $[AD]$ sein, was drucktechnisch bei Sturm nicht gut gelungen ist.)

Die Dreiecke $\triangle BAD$, $\triangle BDE$ und $\triangle BEC$ sind dann ähnlich, und also gilt:

$$|BC| : |BE| = |BE| : |BD| = |BD| : |AB| \tag{8}$$

- $|BE|$ und $|BD|$ sind somit die gesuchten mittleren Proportionalen zu $|AB|$ und $|BC|$.

Das mathematisch Wesentliche an der Lösung mit dem Holzrahmen-Apparat lässt sich anhand von Abb. 8 und Abb. 9 abstrahierend zeigen:

Der in Abb. 5 gezeigte Holzrahmen-Apparat (ein „Einschiebe-Apparat“) ist gemäß Abb. 6 in *zwei Rechtwinkelzüge* zerlegt *zu denken*, die aus je zwei Strecken bestehen und rechtwinklig miteinander fest verbunden sind – hier in Abb. 8 das obere durchgezogene und das dick gestrichelte, jeweils rechtwinklige Streckenpaar.

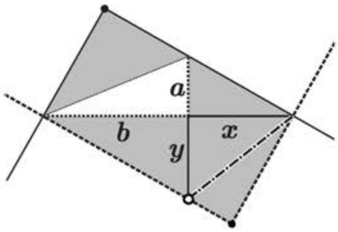


Abb. 8: Einschiebe-Apparat in „beliebiger“ Stellung (*symbolisch* gemäß Abb. 6)

Diese beiden Rechtwinkelzüge sind unter Erhalt ihrer Parallelität (gedanklich) zueinander beweglich (in Abb. 5 ist das „Lineal“ $[KL]$ gegenüber $[GH]$ parallel beweglich).

Man „bewegt“ nun einen dieser beiden Rechtwinkelzüge so weit, bis die beiden „unteren“ in Abb. 8 zu sehenden Punkte (hohl bzw. ausgefüllt) wie in Abb. 9 zusammenfallen (das entspricht der in Abb. 6 dargestellten „Lösungsstellung“). Aufgrund von Ähnlichkeitsbeziehungen in sich entsprechenden Dreiecken ist dies dann die Lösung des Problems der Würfelverdoppelung, denn man liest wie in (8) ab:

$$a : x = x : y = y : b$$

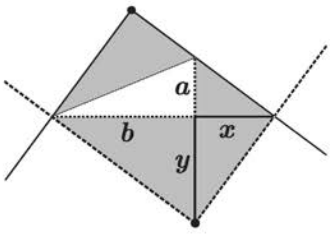


Abb. 9: Einschiebe-Apparat in Lösungsstellung (*symbolisch* gemäß Abb. 6)

Die in Abb. 9 angedeutete auf Abb. 6 basierende, zunächst nur *ideelle Lösung* lässt sich mit einem Programm für Bewegungsgeometrie simulieren, was dem Verständnis dieser *Einschiebelösung* dienen mag.

Der in Abb. 5 gezeigte Holzrahmen-Apparat ist zwar für praktische Einschiebelösungen prinzipiell geeignet, wenngleich er recht umständlich zu handhaben ist. Besser eignen sich *Winkelhaken*, wie sie bereits früher von Handwerkern als Werkzeuge benutzt wurden und die wohl auch schon Hippokrates kannte. Abb. 10 zeigt, wie man mit einem Paar von zwei Winkelhaken (hinreichender Länge) die beschriebene Einschiebelösung auch praktisch erzielen kann: Man lege das Winkelhakenpaar auf das aus $[AB]$ und $[BC]$ bestehende Streckenpaar in Abb. 6 und passe es durch Drehen und In-Sich-Parallelverschieben gemäß der „Betriebsanleitung" von Sturm (also durch „Rücken") so ein, dass eine Lösungsposition wie in Abb. 9 entsteht.

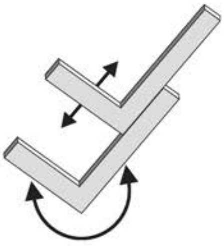


Abb. 10: Winkelhaken-Paar

5.2 Lösungswerkzeug: das Mesolabium des Eratosthenes

Eratosthenes von Kyrene (276 – 194) berichtet in dem bereits erwähnten „Sendschreiben" an den König Ptolemaois von dem Problem der Würfelverdoppelung, und er beschreibt hier auch einen von ihm für die Problemlösung erfundenen Apparat, den er „Mesolabium" nennt, was „Ergreifer der Mitte" bedeutet. Sturm schreibt dazu auf S. 109 f. (vgl. Abb. 11):

> Eratoſthenes / von dem wir oben den Urſprung der berühmten Aufgab gelernet / hat nachfolgenden Weg dem König Ptolomæo eröffnet : Es ſeyen gegeben zwey ungleiche Lineen / AE und DH, zwiſchen welchen ſollen zwey mittlere gleichverhaltende gefunden werden.
>
> So ſetze man nun AE winkelrecht auf eine andere / nach Belieben genom̃ene / Lini EH, und beſchreibe auf eben derſelben Lini / in der Höhe AE drey gleiche Rechtekke / [...] und ziehe die Durchmeſſer AF, LG, IH. Hierauf ſchiebe man in Gedanken das lezte Rechteck HI unter das mittlere unbewegliche / und das erſte / AF darüber (wie in der andern Figur) biß die Puncten A, B, C, D in einer geraden Lini ſtehen / welche / biß an die verlängerte EH hinaus gezogen ſey / AK. So iſt dann nun offenbar / weil AE, FB, GC, DH, gleich lauffen / daß **(vermög des 2ten im VI. B.)** ſich verhalte AK gegen KB, wie EK gegen KF, und wiederumb / (weil auch AF, BG, CH gleich lauffen) wie AK gegen KB, alſo FK gegen KG. Iſt alſo / wie AK gegen KB, alſo EK gegen KF, und KF gegen KG. KF iſt aber ferner gegen KG, wie KB gegen KC, und folgends / wie KG gegen KH. Derowegen / wie EK gegen KF, alſo KF gegen KG und KG gegen KH. Wie ſich aber verhält EK gegen KF, alſo AE gegen BF (**nach dem 4ten im VI.**) und ferner / wie KF gegen KG, alſo BF gegen CG; und noch weiter / wie KG gegen KH, alſo CG gegen DH. Derohalben ſo verhalten ſich auch / wie AE gegen BF, alſo BF gegen CG und CG gegen DH; und ſind alſo BF und CG die zwey begehrte mittlere gleichverhaltende.

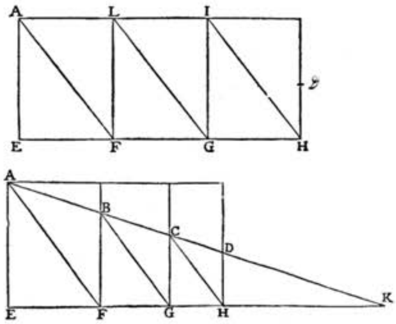


Abb. 11: Mesolabium-Darstellungen in [Sturm 1670, 109]

Man übersetze die verbal beschriebenen Proportionen in Gleichungen und überprüfe die Folgerungen sowohl einzeln als auch insgesamt auf Schlüssigkeit! Die beiden Hinweise in Klammern beziehen sich auf Sätze in Euklids „Elementen" – welche sind hier jeweils gemeint?

Es möge ein Ziel sein, Sturms Betrachtung visuell klar und formal straff zu interpretieren, etwa wie folgt:

Abb. 12 zeigt eine Ausgangsposition des aus drei kongruenten rechteckigen Täfelchen bestehenden Mesolabiums, die auf parallelen Schienen horizontal frei beweglich sind. So möge z. B. das ganz links zu sehende Täfelchen „oben“ liegen (siehe Sturm), darunter liege das mittlere und darunter, ganz unterhalb gelegen, liege das rechte. Die drei auf den Täfelchen markierten Diagonalen sind aufgrund der Anordnung parallel.

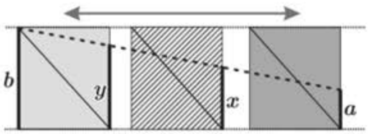


Abb. 12: Mesolabium – Ausgangsposition

Nach dem Hilfssatz des Hippokrates sind nun zu zwei gegebenen Längen a und b mit $a < b$ zwei Längen x und y mit $a : x = x : y = y : b$ gesucht. Wir wählen dazu a und b als Längen auf den Außenrändern der äußeren Täfelchen. Damit lässt sich im Prinzip jeder beliebige Fall erfassen, indem die Längenpaare ggf. mit Hilfe des Strahlensatzes angepasst werden. Sodann denken wir uns zwischen den oberen Endpunkten der mit a und b markierten Strecken ein Gummiband gespannt (gestrichelt in Abb. 12; die mit x und y markierten Strecken sind noch nicht die gesuchten Lösungen!). Die Täfelchen werden nun horizontal abwechselnd und iterativ so weit verschoben, bis sich das „Gummiband“ und die Diagonalen jeweils auf der rechten Kante eines Täfelchens schneiden und damit zwei neue Strecken der Längen x und y auf den beiden mittleren Kanten kennzeichnen (Abb. 13).

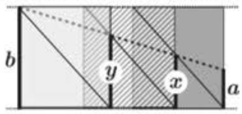


Abb. 13: Lösungsposition

Behauptung: In Abb. 13 sind x und y die beiden gesuchten mittleren Proportionalen.

Beweis: Abb. 14 betont Abb. 13 in anderer Weise. Die drei hellen und die drei dunklen Dreiecke sind jeweils ähnlich, also:

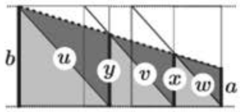


Abb. 14: ähnliche Dreiecke

$$b : u = y : v = x : w \quad \text{und} \quad y : u = x : v = a : w.$$

Elementare Kombination dieser Gleichungen liefert $a : x = x : y = y : b$. ◆

Ist das nun wirklich wesentlich anders als bei Sturm? Die beschriebene manuelle Iteration „konvergiert“ überraschend schnell und zufriedenstellend. Die rechteckigen Täfelchen des von Eratosthenes erfundenen Mesolabiums bestanden aus Holz, Metall oder Elfenbein. Dieses Verfahren kann man auch mit einem angelegten „Einschiebelineal“ durchführen, und es lässt sich sehr schön mit einem Programm für Bewegungsgeometrie simulieren. Cantor schreibt abschließend zur Bedeutsamkeit dieser Erfindung: [7]

> Eratosthenes schlug diese seine Erfindung so hoch an, dass er zum ewigen Gedächtnisse derselben ein Exemplar als Weihgeschenk in einem Tempel aufhängen liess.

Andererseits weist Sturm darauf hin, dass Eutokios ausdrücklich anmerkt, dass Nikomedes (280 – 210 v. Chr.) später sehr über Eratosthenes‘ Mesolabium gelacht habe, weil dieses

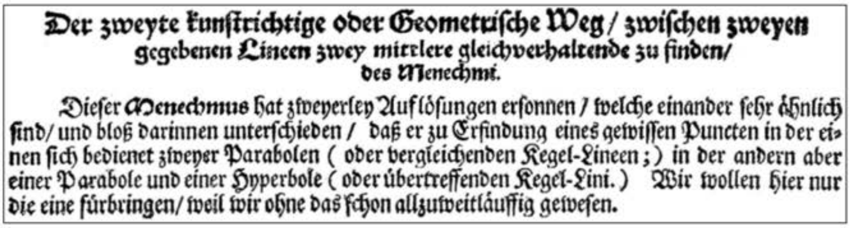
> nicht nur nit ins Werk koͤnnte geſetzet und zur Ubung gebracht werden / ſondern auch nicht Kunſt-gemaͤß waͤre / und alles Kunſt-richtigen Geometriſchen Grundes ermangelte. [8]

Mit dem Mesolabium ist – wie mit dem Holzrahmen-Apparat und dem Winkelhakenpaar – „nur“ eine „mechanische“, angenäherte Lösung möglich, nicht jedoch eine exakte, auf streng mathematischen „Regeln“ beruhende Lösung. Eine solche präsentierte dann Nikomedes mit Hilfe der von ihm erfundenen „Muschellinie“ (oder „Konchoïde“), mit der er auch das Problem der Winkeldreiteilung löste, und er erfand sogar einen Konchoïden-Zirkel, den Sturm ebenfalls vorstellt. Das alles kann hier leider nicht dargestellt werden. [9]

6 Beispiele für „kunstrichtige" Lösungen des Delischen Problems

6.1 Lösungsweg: Schnittpunkt von zwei Parabeln nach Menaichmos

Menaichmos (380 – 320) gelang die für die Verdoppelung des Würfels erforderliche Auffindung von zwei mittleren Proportionen mit Hilfe der Ermittlung des Schnittpunkts zweier Kegelschnitte – sowohl durch den Schnitt von zwei Parabeln als auch durch den Schnitt einer Parabel und einer Hyperbel. Sturm beginnt seinen Abschnitt hierzu wie folgt:


Der zweyte kunſtrichtige oder Geometriſche Weg / zwiſchen zweyen gegebenen Lineen zwey mittlere gleichverhaltende zu finden/ des Menechmi.

Dieſer Menechmus hat zweyerley Auflöſungen erſonnen / welche einander ſehr ähnlich ſind/ und bloß darinnen unterſchieden / daß er zu Erfindung eines gewiſſen Puncten in der einen ſich bedienet zweyer Parabolen (oder vergleichenden Kegel-Lineen ;) in der andern aber einer Parabole und einer Hyperbole (oder übertreffenden Kegel-Lini.) Wir wollen hier nur die eine fürbringen/ weil wir ohne das ſchon allzuweitläuffig geweſen.

Abb. 15: Überschrift und Einleitung zu Menaichmos' Lösungsweg aus [Sturm 1670, 118]

Da auch die bisherige Darstellung schon „allzu weitläufig gewesen" ist, soll hier ebenso nur der Weg über den Schnitt zweier Parabeln kurz beschrieben werden, ohne Sturms Ausführungen aus Platzgründen explizit folgen zu können: [10]

Wie zuvor beim Mesolabium geht es wieder um die Bestimmung von zwei mittleren Proportionalen x und y zu gegebenen Längen a und b mit $a < b$, so dass dann also $a : x = x : y = y : b$ gilt. Hieraus lassen sich einerseits die beiden Gleichungen $ay = x^2$ und $xy = ab$ ablesen, was als Schnitt einer Parabel mit einer Hyperbel interpretierbar ist, und andererseits liest man die Gleichungen $ay = x^2$ und $bx = y^2$ ab, was als Schnitt von zwei Parabeln gedeutet werden kann. Dieser Fall sei hier betrachtet. Das bei Sturm umständlich beschriebene Lösungsverfahren von Menaichmos sei mit Abb. 16 angedeutet:

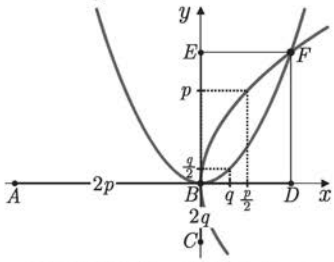


Abb. 16: Schnitt zweier Parabeln zur Würfelverdoppelung nach Menaichmos

Gegeben seien zwei Parabeln in Normalformdarstellung $y^2 = 2px$ bzw. $x^2 = 2qy$ mit den sog. *Halbparametern* p bzw. q. Dabei seien p und q so gewählt, dass $a = 2q$ und $b = 2p$ gilt. Für die Koordinaten x und y des Schnittpunkts F der beiden Parabeln gilt dann:

$x^2 = ay$ ($a : x = x : y$) und $y^2 = bx$ ($x : y = y : b$),

insgesamt also $a : x = x : y = y : b$, so dass die *Schnittpunktkoordinaten die beiden gesuchten mittleren Proportionalen* sind. Damit ist das Problem der Würfelquadratur im Prinzip gelöst, sofern sich ein Weg findet, aus den gegebenen Größen a und b die beiden Parabeln zu zeichnen, um deren Schnittpunkt zu ermitteln. Menaichmos bietet auch dafür eine elegante Lösung an, die dazu geeignet ist, einen mechanischen „Parabelzirkel" zu bauen, ähnlich dem Konchoïdenzirkel, um damit die Normalparabel wie eine Konchoïde „organisch" erzeugen zu können, was bedeutet, dass sie nicht nur punktweise, sondern im Ganzen erzeugt werden kann wie z. B. ein Kreis mittels Zirkel oder eine Ellipse über die sog. „Gärtner-Konstruktion". Dazu sei gemäß [Sturm 1670, 119 f.] in Abb. 17 nur eine der beiden Parabeln aus Abb. 16 betrachtet, und diese Darstellung sei wie folgt ergänzt:

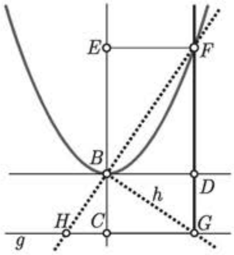


Abb. 17: Parabelzirkel nach Menaichmos

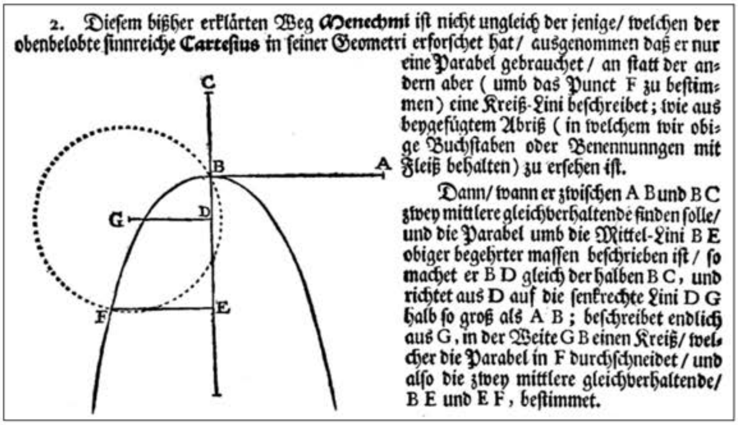
Parallel zu $\langle BD\rangle$ läuft die Gerade g durch C, und links von C ist $H \in g$ frei gewählt. Die gestrichelte Halbgerade h ist orthogonal zur Geraden $\langle HB\rangle$ und schneidet g in G, also ist $[BG\rangle = h$. $[BG\rangle$ ist fest mit $\langle HB\rangle$ in B derart verbunden, dass die Punkte G und H bei Drehung dieses Verbundsystems um B auf g gleiten. Die zu g orthogonale Gerade $\langle GD\rangle$ durch G schneidet $\langle HB\rangle$ in F, und dieser Schnittpunkt liefert bei Verschiebung von H (zunächst) den rechten Parabelast als Ortskurve. Aus Abb. 17 liest man wegen der Ähnlichkeit von Dreiecken $2q : x = x : y$ ab, was $x^2 = 2qy$ liefert, also die zu konstruierende Parabel. Der hier dargestellte *Parabelzirkel* lässt sich (bis auf die technische „Problemzone" in der Nähe des Punktes B) sowohl mechanisch bauen als auch mit einem Programm für Bewegungsgeometrie simulieren. Rund 2000 Jahre später stellte Frans van Schooten (1615 – 1660) bekanntlich ebenfalls einen (anderen) Parabelzirkel vor (Abb. 18). [11] Beide „Zirkel" dienen aber nicht der Problemlösung, es reicht, sie in ihrer theoretischen Möglichkeit „zu denken"!

Abb. 18: Parabelzirkel von Frans van Schooten

6.2 Lösungsweg: Schnittpunkt von einer Parabel mit einem Kreis nach Descartes

Im Anschluss hieran erwähnt Sturm eine elegante Variation obiger Lösung durch René **Descartes** mit nur einer Parabel und einem Kreis. Den Kreismittelpunkt und Kreisradius teilt Sturm nur ohne Beweis mittels Abb. 19 mit. Wir rechnen es einfach analytisch nach:

Für den Parabelschnittpunkt in Abb. 16 setzen wir $F = (u, v)$ an. Aus den beiden Parabelgleichungen $x^2 = 2qy$ und $y^2 = 2px$ ergibt sich $u = 2 \cdot \sqrt[3]{pq^2}$ und $v = 2 \cdot \sqrt[3]{p^2 q}$. Mit $a = 2q$ und $b = 2p$ bestätigt man sofort $a : x = x : y = y : b$. Gemäß Abb. 16 gilt dann für den Kreismittelpunkt $G = (p, q)$, also gilt für den gesuchten Radius $r = \sqrt{p^2 + q^2}$, so dass nur noch $|MF| = r$ zu zeigen ist, was man ebenfalls sofort nachrechnet.



2. Dieſem bißher erklärten Weg **Menechmi** iſt nicht ungleich der jenige/ welchen der obenbelobte ſinnreiche **Carteſius** in ſeiner Geometri erforſchet hat/ ausgenommen daß er nur eine Parabel gebrauchet/ an ſtatt der andern aber (umb das Punct F zu beſtimmen) eine Kreiß-Lini beſchreibet; wie aus beygefügtem Abriß (in welchem wir obige Buchſtaben oder Benennungen mit Fleiß behalten) zu erſehen iſt.

Dann/ wann er zwiſchen A B und B C zwey mittlere gleichverhaltende finden ſolle/ und die Parabel umb die Mittel-Lini B E obiger begehrter maſſen beſchrieben iſt/ ſo machet er B D gleich der halben B C, und richtet aus D auf die ſenkrechte Lini D G halb ſo groß als A B; beſchreibet endlich aus G, in der Weite G B einen Kreiß/ welcher die Parabel in F durchſchneidet/ und alſo die zwey mittlere gleichverhaltende/ B E und E F, beſtimmet.

Abb. 19: Variation von Menaichmos' Lösung durch Descartes (aus [Sturm 1670, 120])

Menaichmos' Lösungsweg liegt über die Parabelgleichungen durchaus nahe, hingegen setzt die Entdeckung von Descartes' Weg subtile Kenntnisse der analytischen Geometrie voraus.

7 Fazit

Die Betrachtung von Sturms Darstellung, namentlich seiner originalen schriftlichen Formulierungen, ist nicht ohne Reiz, und sie in heutige, sowohl sprachliche als auch symbolische Formulierungen zu übersetzen, ist eine wohl ungewöhnliche, aber möglicherweise auch dankbare Aufgabe für den Mathematikunterricht. Darüber hinaus sind diese Beispiele zu den klassischen Problemen der Antike dazu geeignet, ein subtileres Verständnis von „Geometrien" zu entwickeln, wie es bereits Sturm wunderbar mit seinen Formulierungen der „mechanischen Lösungen" und der „kunstmäßigen Lösungen" ausdrückt. „Geometrie" begegnet uns nämlich janusköpfig einerseits in „praktischen Geometrien", wie es schon im Wortursprung als „Landvermessung" deutlich wird, und andererseits kennen wir nicht auf Anwendung bezogene „theoretische Geometrien" wie etwa diverse nichteuklidische Geometrien. Ulrich Felgner schreibt dazu mit Bezug auf Hilbert:[12]

> Als „allgemeines Wissensgebiet" ist die Geometrie für Hilbert eine *„Naturwissenschaft"* [...]
> Aber die „Theorie des Wissensgebietes" ist nach Hilbert das „Fachwerk der Begriffe" [...].
> Die *„Theorie des Wissensgebietes"* ist keine Naturwissenschaft, sie ist ein Gebiet der reinen Mathematik.

Und auch die „euklidische Geometrie" ist eine „theoretische Geometrie", bei der es darum geht, Konstruktionen zu „denken", nicht aber sie praktisch durchzuführen.

Literatur

Cantor, Moritz [1894]: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Erster Band*. Leipzig: Teubner, zweite, überarbeitete und aktualisierte Auflage (3. Auflage 1907).

Felgner, Ulrich [2014]: Hilberts *„Grundlagen der Geometrie"* und ihre Stellung in der Geschichte der Grundlagendiskussion. In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, **115**(2014)3/4, 185 – 206.

Hischer, Horst [2015]: *Die drei klassischen Probleme der Antike. Historische Befunde und didaktische Aspekte*. Hildesheim: Franzbecker.

van Schooten, Frans [1646]: *De organica conicarum sectionum in plano descriptione tractatus: geometris, opticis, praesertim vero gnomonicis & mechanicis utilis*. Leyden.

Sturm, Johan Christoph [1670]: *Des unvergleichlichen Archimedis Kunst-Bücher oder heutigs Tags befindliche Schrifften*. Nürnberg: Fürst.

van der Waerden, Bartel Leendert [1956]: *Erwachende Wissenschaft. Ägyptische, Babylonische und griechische Mathematik*. Basel / Stuttgart: Birkhäuser.

---

1 Alle drei Probleme werden ausführlich in [Hischer 2015] betrachtet.

2 (6) lässt sich sofort zur Bestimmung zweier mittlerer Proportionalen zu a und b modifizieren, und offensichtlich lässt sich das zur Bestimmung von n mittleren Proportionalen zu a und b verallgemeinern.

3 [Sturm 1670, 102]

4 [Cantor 1894, 199]

5 [Sturm 1670, 102 f.]

6 Siehe hierzu die ausführliche Begründung von Ulrich Felgner in [Hischer 2015, 35 ff.].

7 [Cantor 1894, 316]; gemäß [van der Waerden 1956, 384] ließ Eratosthenes seine *„mechanische Auflösung [...] im Tempel des Königgottes PTOLEMAIOS in Stein meisseln"*, wobei *„darüber ein Modell in Bronze stand, das aus dreieckigen oder viereckigen Plättchen bestand [...]"*.

8 [Sturm 1670, 110]

9 Siehe dazu die ausführlichen Betrachtungen in [Hischer 2015].

10 [Sturm 1670, 118 f.]

11 [van Schooten 1646; 26, 57, 74]

12 [Felgner 2014, 203]